

# LA RELATIVITÀ PER NON ADDETTI AI LAVORI

**Gianni Comini**

CISM - Dipartimento di Energia e Ambiente

Piazza Garibaldi 18 - 33100 Udine

*gianni.comini@cism.it*

REVISIONE 2018

## Sommario

Il testo è suddiviso in Sezioni i cui contenuti si possono così riassumere:

1. La Fisica agli albori del 1900 e il metodo degli “esperimenti mentali” di Einstein.
2. Adolescenza di Einstein e prime fonti di ispirazione.
3. Biografia giovanile di Einstein, motivazioni e postulati della Relatività Speciale (così definita in quanto valida solo per sistemi in moto rettilineo uniforme).
4. Conseguenze cinematiche della Relatività Speciale sulle definizioni di tempo e simultaneità, e sulle misure di intervalli di tempo, lunghezza e frequenza. Trasformazioni di Lorentz e metodo di calcolo della somma relativistica delle velocità. Invarianza dell'intervallo spazio-temporale e descrizione dello spaziotempo di Minkowski.
5. Conseguenze dinamiche della Relatività Speciale sulle definizioni di quantità di moto, energia cinetica, energia totale, energia a riposo e sull'equivalenza tra energia a riposo e massa, espressa dalla relazione  $E = mc^2$  (che è, forse, la formula più famosa della Fisica).
6. Biografia della piena maturità scientifica di Einstein, principi ispiratori della Relatività Generale (così definita in quanto valida anche per sistemi che si muovono con moto accelerato uno rispetto all'altro) e intuizione su “l'uomo che cade dal tetto”.
7. Principio di equivalenza tra campo gravitazionale e sistema di riferimento in moto uniformemente accelerato, e conseguenze su curvatura dei raggi di luce, trascorrere del tempo e frequenza.
8. Teoria relativistica della gravitazione, equazioni di campo di Einstein e conseguenze su curvatura dello spaziotempo e formazione di onde gravitazionali.
9. Considerazioni cosmologiche di Einstein sulla Relatività Generale.
10. Ultimi anni della vita di Einstein e produzione scientifica dopo l'affievolimento della creatività giovanile.

# Indice

<b>1</b>	<b>“L’immaginazione conta più della conoscenza”</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Il ragazzo che inseguiva i raggi di luce</b>	<b>4</b>
2.1	“Il gran navilio” . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Relatività Speciale</b>	<b>8</b>
3.1	Motivazioni e postulati della Relatività Speciale . . . . .	9
3.1.1	Interazione elettromagnetica tra magneti e conduttore* . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Conseguenze cinematiche</b>	<b>12</b>
4.1	Simultaneità . . . . .	13
4.2	Dilatazione del tempo . . . . .	14
4.2.1	Paradosso dei gemelli . . . . .	16
4.3	Effetto Doppler relativistico . . . . .	17
4.3.1	Dimostrazione dell’effetto Doppler relativistico* . . . . .	19
4.4	Contraazione delle lunghezze . . . . .	20
4.5	Le trasformazioni di Lorentz* . . . . .	21
4.6	Somma relativistica delle velocità . . . . .	23
4.6.1	Dimostrazione della Regola di Einstein* . . . . .	24
4.7	Invarianza dell’intervallo spazio-temporale . . . . .	24
4.7.1	Dimostrazione dell’invarianza spazio-temporale* . . . . .	25
4.8	Lo spaziotempo di Minkowski . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Conseguenze dinamiche</b>	<b>27</b>
5.1	Quantità di moto . . . . .	28
5.2	Dalla quantità di moto all’energia cinetica* . . . . .	29
5.2.1	Interpretazione geometrica* . . . . .	31
5.2.2	Energia cinetica, energia totale ed energia a riposo . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Relatività Generale</b>	<b>33</b>
6.1	L’uomo che cade dal tetto . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Principio di Equivalenza</b>	<b>35</b>
7.1	Curvatura dei raggi di luce . . . . .	37
7.2	Spostamento gravitazionale delle frequenze di radiazione* . . . . .	39
7.2.1	Orologi nel campo gravitazionale . . . . .	41
7.2.2	I “buchi neri” . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Teoria relativistica della gravitazione</b>	<b>43</b>
8.1	Le equazioni di campo di Einstein* . . . . .	44
8.2	La curvatura dello spaziotempo . . . . .	45
8.3	Le onde gravitazionali . . . . .	46
8.4	Accuratezza della teoria relativistica della gravitazione . . . . .	47

<b>9</b>	<b>Dalla relatività alla cosmologia moderna</b>	<b>49</b>
9.1	Estensione all'universo delle equazioni di campo . . . . .	50
9.2	Le equazioni cosmologiche di Einstein* . . . . .	51
<b>10</b>	<b>Dopo la relatività</b>	<b>52</b>

**Avvertenza: i paragrafi con asterisco non sono indispensabili per la comprensione del testo e possono essere saltati se non si dispone delle necessarie conoscenze matematiche.**

# 1 “L’immaginazione conta più della conoscenza”

Alla fine del 1800, l’edificio concettuale della Fisica appariva completato ed alquanto solido, sostenuto com’era da pilastri quali le leggi della meccanica, enunciate ancora nel 1667 nei “Principi Matematici della Filosofia Naturale” di Isaac Newton, e le leggi dell’elettromagnetismo, enunciate nel 1873 nel “Trattato sull’Elettricità e il Magnetismo” di James Clerk Maxwell. A quel punto, la meccanica newtoniana e la teoria dell’elettromagnetismo parevano fornire le chiavi di interpretazione e previsione di tutti i fenomeni: dal moto dei pianeti alle applicazioni tecnologiche delle onde elettromagnetiche. La quiete di quella che ora viene definita la *Fisica Classica* fu, invece, sconvolta da due rivoluzioni che, nel giro di pochi anni, portarono a quella che ora viene definita *Fisica Moderna*.

- Nel 1901 Max Planck (1858-1947) gettò le basi della teoria dei quanti con la sua ipotesi sulle modalità di emissione delle radiazioni elettromagnetiche, esposta in un lavoro dal titolo “Legge di distribuzione dell’energia nello spettro radiativo normale”.
- Nel 1905 Albert Einstein (1879-1955) espose la teoria della relatività speciale in un lavoro dal titolo: “Elettrodinamica dei corpi in movimento”.

Qui ci si occupa di relatività e, in tale contesto, va precisato, innanzi tutto, che la teoria della relatività comprende due teorie distinte: quella della relatività speciale, che Einstein espose nel già citato lavoro del 1905, e quella della relatività generale, che lo stesso Einstein propose nel 1915 all’Accademia Prussiana delle Scienze e pubblicò in dettaglio nel 1916 in un lavoro dal titolo “Fondamenti della teoria della relatività generale”.

La teoria della relatività speciale riguarda, essenzialmente, il confronto tra i risultati delle misure di spazio e tempo effettuate in sistemi inerziali (ovvero in sistemi che, non essendo soggetti a forze esterne, proseguono *per inerzia* nello stato di moto rettilineo uniforme e, di conseguenza, si muovono con velocità relativa costante uno rispetto all’altro). Essa si presenta come un superamento della meccanica newtoniana (che, tuttavia, continua a valere quando i corpi si muovono a velocità relativamente basse come, generalmente, succede nella vita di tutti i giorni). La relatività generale, invece, estende i principi della relatività ai sistemi che si muovono con moto accelerato uno rispetto all’altro e, soprattutto, propone una teoria della gravitazione completamente innovativa.

Contrariamente a quello che comunemente si crede, la teoria speciale e la stessa teoria generale con la sola, peraltro importante, esclusione del modello matematico della gravità, non sono “impossibili” da capire per i “non addetti ai lavori”, soprattutto se si pone l’accento sulle implicazioni concettuali. Lo stesso Einstein, con l’aforisma citato nel titolo del paragrafo, suggerisce come procedere: non soffermarsi sugli aspetti matematici e privilegiare, invece, l’immaginazione guidata, ad esempio, da esperimenti mentali del tipo di quelli da lui stesso proposti.

## 2 Il ragazzo che inseguiva i raggi di luce

A sedici anni Einstein aveva appena abbandonato la scuola secondaria a Monaco, in Germania, poiché, a suo giudizio, il sistema educativo tedesco era rigido e nozionistico al

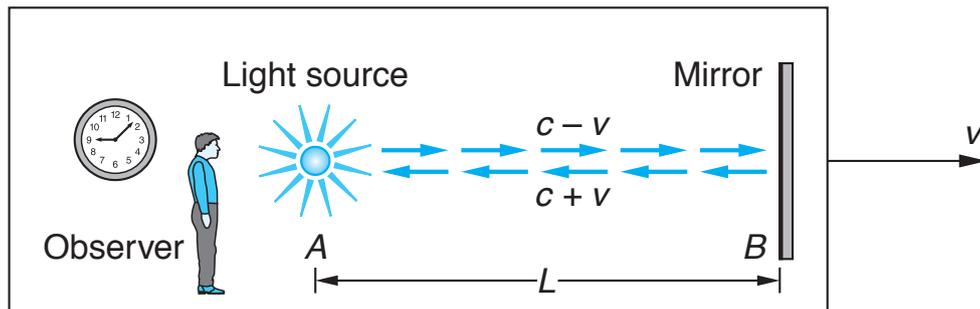


Figura 1: Sistema con sorgente luminosa, specchio ed osservatore in moto con velocità  $v$  rispetto all'etere mentre, per assurdo, si suppone che  $c$  sia la velocità della luce rispetto all'etere. [P.A. Tipler e R.A. Lewellyn, *Modern Physics-VIth ed.*, W.A. Freeman and Company, New York, 2012]

punto da scoraggiare la creatività degli allievi. Aveva anche convinto la famiglia, che nel frattempo si era trasferita in Italia, a lasciarlo proseguire la scuola ad Aarau, in Svizzera, in un Istituto noto per un sistema educativo (il metodo Pestalozzi) che incoraggiava l'intuizione degli allievi. Per la sua età Einstein, pur carente nelle materie umanistiche, aveva (va da sé) un ottimo livello di preparazione in matematica e, soprattutto, in fisica che già lo mettevano in grado di affrontare, in autonomia, argomenti piuttosto avanzati.

Verso la fine del 1800, non si dubitava del fatto che tutte le onde richiedessero un mezzo per propagarsi: le onde dell'oceano l'acqua, le onde sismiche il terreno, e così via. Si constatava poi che la velocità di propagazione dipendeva dalle proprietà del mezzo (come, ad esempio, la velocità di propagazione del suono nell'aria dipendeva dalla temperatura dell'aria). Si trovava ancora che la velocità di propagazione delle onde era una velocità relativa rispetto al mezzo: il suono emesso in favore di vento va più veloce del suono emesso in direzione opposta. Pertanto era naturale, per gli scienziati del tempo, aspettarsi che anche le onde elettromagnetiche si propagassero in un mezzo che veniva chiamato "etere" (per quanto nessuno avesse idea di cosa l'etere fosse).

Al contrario, Einstein sedicenne era turbato dall'ipotesi di esistenza dell'etere e, per dare concretezza sua perplessità, aveva immaginato di inseguire nell'etere un raggio di luce fino a raggiungerlo ed a muoversi alla stessa velocità del raggio, in modo da vedere l'onda elettromagnetica ferma (diremmo noi: come un surfista che cavalca un'onda dell'oceano). Si sarebbe trattato di un fenomeno ben strano e contrario all'intuizione perché, secondo Einstein, anche le leggi dell'elettromagnetismo, oltre a quelle della meccanica, dovevano valere inalterate per tutti i sistemi inerziali. Erano riflessioni che, sia pure in embrione, anticipavano un aspetto essenziale della teoria della relatività speciale ed estendevano il principio di relatività Galileiano (che, ovviamente, non poteva comprendere l'elettromagnetismo).

La versione grafica modernizzata dell'esperimento mentale di Einstein è riportata nella Fig. 1, dove si vede un sistema (adesso diremmo l'interno di un'astronave) che si muove con velocità  $v$  rispetto all'etere trasportando una sorgente luminosa, uno specchio ed un

osservatore (dall'apparenza non molto tonica come si addice agli scienziati). Se esistesse l'etere (che, per semplicità, si potrebbe supporre fermo), la velocità della luce  $c$  (dal latino *celeritas*) sarebbe una velocità assoluta rispetto all'etere  $e$ , di conseguenza, la velocità relativa rispetto all'osservatore (che, ricordiamolo, si muove nell'etere con la velocità  $v$  dell'astronave) sarebbe pari a  $c - v$  nel percorso di andata verso lo specchio, e  $c + v$  nel percorso di ritorno. Ma se si avesse  $v = c$  (come ipotizzato nell'esperimento mentale), la luce non raggiungerebbe mai lo specchio, l'immagine della sorgente luminosa sparirebbe alla vista e l'osservatore saprebbe di aver raggiunto la velocità della luce. In pratica l'etere, se davvero esistesse, sarebbe un sistema di riferimento assoluto  $e$ , quindi, privilegiato.

(Per la verità nel 1895, anno presunto dell'esperimento mentale, erano già passati circa 8 anni dall'esperimento fisico di Michelson e Morley che aveva dimostrato, in maniera inconfutabile, l'impossibilità dell'esistenza dell'etere. Dell'etere dell'epoca resta, comunque, ancora una traccia nel linguaggio comune quando si dice che "i segnali radiotelevisivi sono trasmessi attraverso l'etere" e, di conseguenza, è comprensibile che, come molti ancor oggi, l'Einstein sedicenne non fosse a conoscenza dell'esperimento di Michelson e Morley).

## 2.1 “Il gran navilio”

Come si è già osservato, il primo obiettivo del principio di relatività a cui pensava Einstein era l'estensione all'elettromagnetismo del principio di relatività Galileiano. Il principio Galileiano stabilisce che nessun esperimento meccanico compiuto al chiuso (cioè senza avere riferimenti esterni) può permettere ad un osservatore in moto rettilineo uniforme di capire se è fermo, oppure si sta muovendo rispetto a un qualunque altro sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme. Ovvero:

**le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, qualunque sia la velocità relativa degli uni rispetto agli altri.**

L'esperimento mentale che condusse Galileo Galilei (1564-1642) a formulare il suo principio è descritto in modo molto brillante da Salviati, nel “Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo - Giornata Seconda”. Nelle parole di Salviati/Galileo:

- “Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun *gran navilio*”, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; ... osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; ...e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, *fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma.* ...E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione

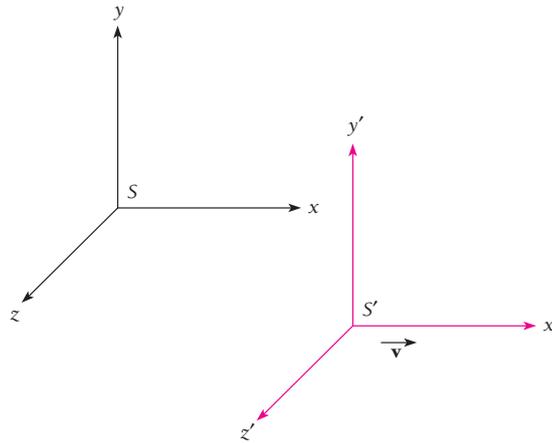


Figura 2: Il sistema inerziale  $S'$  si muove con velocità costante  $v$  nella direzione delle  $x$  positive del sistema inerziale  $S$ , partendo da un tempo  $t = 0$  nel quale si ha:  $x = x' = 0$ .

l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze piú e men notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati: e non è dubbio che ... le mosche parimente e le farfalle, impedita dall'aria, non potrebb' seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notabile si separassero..."

Il "gran navilio" si traduce analiticamente nelle "trasformazioni di Galileo" che descrivono il legame tra le coordinate di un punto in due sistemi di riferimento inerziali (nell'ipotesi, aggiungiamo noi, che le velocità in gioco siano molto inferiori alla velocità della luce). Tali trasformazioni si ricavano procedendo in maniera intuitiva. Nella situazione illustrata in Fig. 2, ad esempio, il sistema inerziale  $S'$  si muove con velocità costante  $v$  nella direzione delle  $x$  positive del sistema inerziale  $S$ , partendo da un tempo  $t = 0$  nel quale si ha:  $x = x' = 0$ . Poiché si ha anche:  $t = t'$  in quanto nella Fisica Classica il tempo è un tempo *assoluto*, necessariamente risulta:  $x = x' + vt$ , oltre a  $y = y'$  e  $z = z'$ , in quanto il movimento interessa la sola direzione  $x$ . Nel caso considerato, di conseguenza, la forma canonica delle trasformazioni è:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad \text{e} \quad t' = t. \quad (1)$$

Ovviamente, la situazione di Fig. 2 si presta ad una descrizione alternativa ugualmente valida: è il sistema inerziale  $S$  a muoversi con velocità costante  $-v$  rispetto a  $S'$ . Evidentemente, nulla cambia perché così risulta ancora:  $x' = x - vt$ , esattamente come previsto nella prima delle relazioni (1).

Piuttosto, potrebbe essere utile notare esplicitamente che:

- sia un osservatore a riposo su  $S$  sia un osservatore a riposo su  $S'$  devono necessariamente concordare sul valore assoluto della velocità relativa  $v$ , pena l'impossibilità fisica di procedere a misure di velocità.

(Il fatto che, abbastanza spesso, guidatori e agenti del traffico non concordino sulle indicazioni del tachimetro sull'autovettura e l'Autovelox sulla strada non ha, in questo contesto, valore di "prova contraria" accettabile).

Infine, a conclusione del paragrafo va ribadito che, per quanto intuitive, le trasformazioni di Galileo sono incompatibili con la teoria della relatività e, di conseguenza, nel seguito dovranno essere sostituite da altre trasformazioni, dette di Lorentz, che forniscono praticamente gli stessi risultati quando le velocità sono molto inferiori alla velocità della luce, ma continuano a valere anche quando le velocità sono confrontabili con quella della luce.

### 3 Relatività Speciale

A ventisei anni, nel 1905, Einstein era un cittadino svizzero in possesso del "diploma di insegnante di matematica e fisica" (nell'Università Italiana attuale sarebbe una laurea, forse magistrale) avendo, già nel 1901, sia ottenuta la nuova cittadinanza (che lo metteva al sicuro dal servizio militare *prussiano*) sia conseguito, al Politecnico di Zurigo, il titolo di "insegnante" (che, all'epoca, dava prospettive di lavoro). Einstein, tuttavia, non era riuscito a trovare un posto come insegnante e, per mantenersi agli studi di dottorato all'Università di Zurigo, aveva accettato il posto di assistente tecnico all'Ufficio Svizzero dei Brevetti a Berna. In questo modo, rispetto all'insegnamento, probabilmente guadagnava di più ed aveva più tempo libero da dedicare al suo, straordinariamente creativo, lavoro autonomo di ricerca. Nel 1905, che è il suo anno magico, oltre alla tesi di dottorato, Einstein pubblicò quattro articoli a contenuto fortemente innovativo riguardanti tre aree differenti della fisica:

- "Movimento di piccole particelle nei liquidi a riposo secondo la teoria molecolare-cinetica del calore" nel quale, sulla base della teoria statistica dei gas, fornì una valutazione quantitativa del moto browniano e formulò l'ipotesi di aleatorietà dello stesso;
- "Punto di vista euristico sulla produzione e trasformazione della luce" (premiato con il Nobel per la Fisica nel 1921) nel quale, per spiegare l'effetto fotoelettrico nei metalli, utilizzò il concetto di quanto introdotto da Planck dimostrandone implicitamente la validità;
- "Elettrodinamica dei corpi in movimento" (già più volte citato), nel quale espose la teoria della relatività speciale;
- "L'inerzia di un corpo dipende dalla sua energia?", un articolo breve nel quale ritornò sulla teoria della relatività speciale derivando la relazione  $E = mc^2$  che è, forse, la formula più famosa della Fisica.

Ovviamente, i due articoli ultimi citati sono quelli più importanti per l'argomento di cui ci si occupa, ma altrettanto importanti sono le motivazioni che hanno spinto Einstein a formulare i due postulati della relatività speciale.

### 3.1 Motivazioni e postulati della Relatività Speciale

La prima motivazione fu il desiderio di simmetria e unificazione che ha sempre guidato Einstein nel suo percorso di ricerca. Al contrario (citando Einstein):

- “È noto che l’elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente [1905] - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni. Si pensi per esempio all’interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre in base all’interpretazione consueta i due casi, a seconda che l’uno o l’altro di questi corpi sia quello in moto [rispetto al sistema di riferimento del laboratorio], vanno tenuti rigorosamente distinti...[Inoltre] esempi analoghi [a quello dell’elettromagnetismo] come pure i tentativi, andati a vuoto di constatare un moto della terra relativamente al *mezzo luminoso*, portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta, non solo in meccanica ma anche in elettrodinamica [e in ottica], non corrisponda ad alcuna proprietà dell’esperienza”

Di qui la formulazione del:

#### **PRIMO POSTULATO DELLA RELATIVITÀ SPECIALE**

**Tutte le leggi fisiche, non solo quelle della meccaniche ma anche quelle dell’elettromagnetismo e dell’ottica, devono valere inalterate in tutti i sistemi inerziali.**

(In realtà, l’asimmetria nell’interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore richiede una ulteriore spiegazione, fornita nel Paragrafo 3.1.1. Tale spiegazione è un po’ tecnica e, di conseguenza, il paragrafo, come altri dello stesso tipo che si incontreranno nel seguito, è contrassegnato da un asterisco).

La motivazione del secondo postulato è più sottile ed ha radici filosofiche legate al rifiuto del concetto di tempo *assoluto* uguale per tutti i sistemi di riferimento. Secondo Einstein, infatti

- “Dobbiamo tener presente che tutte le nostre asserzioni nelle quali il tempo gioca un ruolo sono sempre asserzioni su eventi simultanei. Quando per esempio dico che “Quel treno arriva qui alle ore sette” ciò significa che “Il porsi della lancetta piccola del mio orologio sulle 7 e l’arrivo del treno sono eventi simultanei”. [Tuttavia] una definizione del genere non basta più quando si tratta di collegare temporalmente eventi che abbiano luogo in posti diversi...

Infatti, come illustrato nella Fig. 3, per collegare temporalmente un evento in  $A$  con un evento in  $B$  che hanno luogo nello stesso sistema di riferimento  $S$  a una distanza  $D$  uno dall’altro, è necessario disporre di due orologi sincronizzati. La sincronizzazione dell’orologio in  $B$  con l’orologio in  $A$  si può fare inviando a  $B$  un segnale luminoso proveniente da  $A$  e tenendo conto del tempo di percorrenza  $\overline{AB}$ , pari a  $(t_2 - t_1) = c/D$ . Successivamente, per fornire ad  $A$  l’informazione su un evento registrato in  $B$ , si può inviare un segnale luminoso da  $B$  e tenere conto in  $A$  del tempo di percorrenza del tratto  $\overline{BA}$ . A questo punto, però, si intuisce che un tale procedimento può funzionare

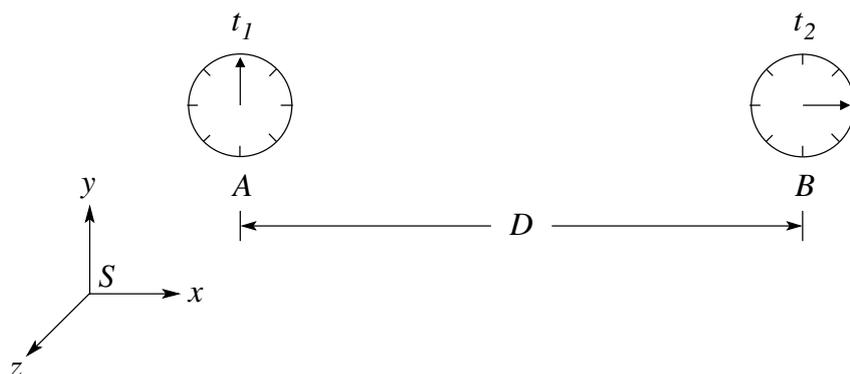


Figura 3: Sincronizzazione di due orologi A e B che si trovano sullo stesso sistema di riferimento  $S$  alla distanza  $D$ .

solo se la luce compie in tempi uguali, pari entrambi a  $(t_2 - t_1)$ , i due percorsi  $\overline{AB}$  e  $\overline{BA}$ , indipendentemente dallo stato di moto del sistema di riferimento  $S$ . (Nell'esperimento mentale del Paragrafo 2, ad esempio, è necessario che la luce compia in tempi uguali i percorsi di andata e ritorno dall'osservatore in  $A$  allo specchio in  $B$ , indipendentemente dalla velocità dell'astronave). Di qui la formulazione del:

### SECONDO POSTULATO DELLA RELATIVITÀ SPECIALE

**La luce nello spazio vuoto si propaga sempre con la stessa velocità  $c$ , indipendentemente dallo stato di moto dei corpi emittenti.**

Con tali premesse, al ventiseienne Einstein non restava che affrontare le conseguenze cinematiche e dinamiche dei postulati... e questi saranno anche gli argomenti di cui ci si occuperà nel seguito (dopo aver fornito i necessari chiarimenti sulle interazioni elettromagnetiche).

#### 3.1.1 Interazione elettromagnetica tra magneti e conduttore\*

Si faccia riferimento alla Fig. 4 dove, per semplicità, il magnete è rappresentato, dal solo polo nord  $N$ , e il conduttore elettrico ha forma di spira circolare chiusa, concentrica rispetto all'asse del sistema e posta su un piano ortogonale all'asse stesso.

Nella situazione a sinistra, la spira è ferma mentre il magnete si muove con velocità  $v$  lungo l'asse. In tal caso, secondo la teoria dell'elettromagnetismo, il magnete produce, in tutto lo spazio circostante, un campo elettrico  $\mathbf{E}$  caratterizzato da linee di campo circolari che si sviluppano su piani paralleli a quello della spira e sono concentriche rispetto all'asse. Nella zona ristretta di spazio occupata dalla spira, il campo magnetico  $\mathbf{B}$  varia di intensità nel tempo (in realtà cala poiché il magnete si sta allontanando) e, di conseguenza, varia anche il flusso magnetico  $\phi_B$  che attraversa l'area contornata dalla spira o, se si vuole, il numero di linee di campo concatenate con la spira. In questo caso, vale la legge di Faraday che, in forma integrale, fornisce

$$\Delta V = - \frac{\Delta \phi_B}{\Delta t} \quad (2)$$

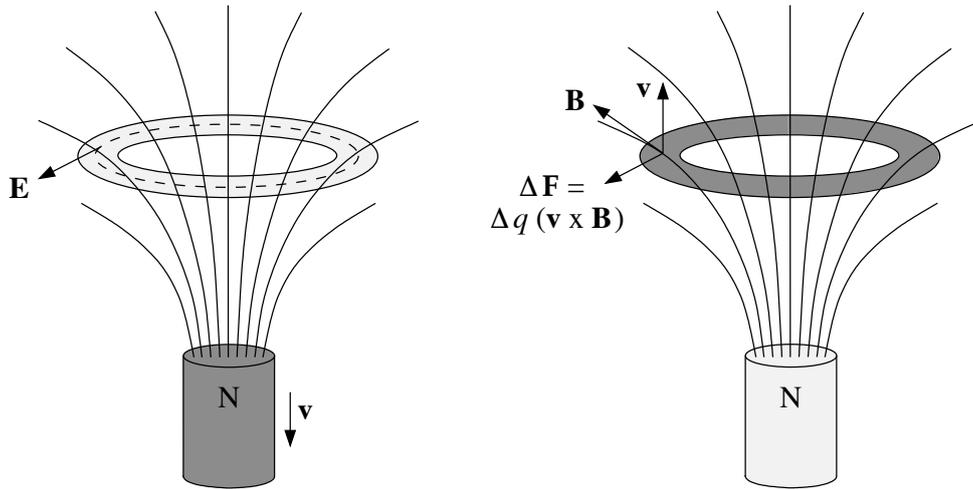


Figura 4: Nella situazione a sinistra, la spira è ferma ed il magnete si muove con velocità  $v$  lungo l'asse mentre, nella situazione a destra, il magnete è fermo e la spira si muove con velocità  $v$  lungo l'asse.

dove  $\Delta V$  è la forza elettromotrice totale indotta nella spira dalle variazioni nel tempo del flusso magnetico concatenato, ed il segno negativo deriva dal fatto che la corrente generata nella spira crea, a sua volta, un campo magnetico tendente al mantenimento del flusso. Per le considerazioni che seguono, è importante notare che la forza elettromotrice totale è calcolabile anche come somma delle forze elettromotrici elementari  $E\Delta l$  che si sviluppano nei singoli tratti del contorno della spira

$$\Delta V = \sum E\Delta l \quad (3)$$

Nella situazione a destra il magnete è fermo, mentre la spira si muove con velocità  $v$  lungo l'asse. Secondo la teoria dell'elettromagnetismo, un magnete fermo non produce alcun campo elettrico  $\mathbf{E}$  nello spazio circostante ma influenza, attraverso la forza di Lorentz, tutte le cariche libere in moto nel campo magnetico (compresi anche gli elettroni della spira conduttrice che si muovono con la spira e sono, sostanzialmente, liberi di spostarsi all'interno). Infatti, la forza di Lorentz si esercita su ogni quantità di carica  $\Delta q$  presente nella spira, secondo la legge

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

assumendo, in ogni punto, la direzione della tangente al contorno della spira in armonia con il fatto che, nella Eq. (4), il simbolo "x" indica un prodotto vettoriale. Pertanto, ai fini pratici, la forza di Lorentz specifica equivale ad un potenziale locale  $\Delta \mathbf{F} / \Delta q \equiv \mathbf{E}_L$ , dove il pedice sta per Lorentz. (Ricordiamo che il potenziale elettrico, come la forza specifica di Lorentz, ha dimensioni di volt per metro, ovvero newton per coulomb, in quanto è una forza per unità di carica). Nei singoli tratti del contorno della spira si sviluppano, quindi, forze elettromotrici elementari  $E_L \Delta l$  la cui somma ha per risultato la forza elettromotrice totale

$$\Delta V_L = \sum E_L \Delta l \quad (5)$$

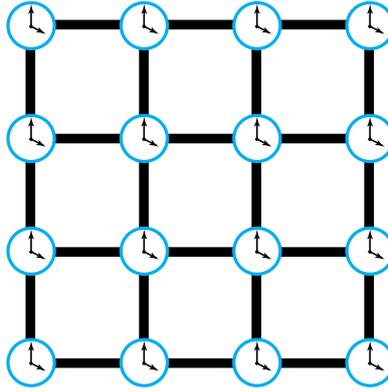


Figura 5: Reticolo di regoli di riferimento e di orologi sincronizzati. [R.A. Serway, C.J. Moses e C.A. Moyer, *Modern Physics-IIIrd ed.*, Brooks/Cole-Thomson Learning, Australia, 2005]

A posteriori, confrontando la (5) con la (3), si constata che:  $\mathbf{E}_L \equiv \mathbf{E}$ ,  $\Delta V_L \equiv \Delta V$  e, ovviamente, anche che le correnti elettriche generate nella spira hanno la stessa intensità e lo stesso andamento in entrambi i casi.

Di conseguenza, Einstein aveva (evidentemente) ragione a notare che la teoria classica dell'elettromagnetismo utilizza due leggi completamente diverse per spiegare lo stesso fenomeno da due punti di vista. Nella situazione di destra, infatti, adottando un sistema di riferimento inerziale solidale alla spira, la spira sarebbe ferma mentre il magnete si muoverebbe riproducendo esattamente la situazione a sinistra. A voler essere pedanti, tuttavia, prima della relatività non sarebbe stato tecnicamente corretto cambiare sistema di riferimento in un problema di elettromagnetismo.

## 4 Conseguenze cinematiche

La cinematica si occupa della misura di *eventi* come, ad esempio, la partenza di un segnale luminoso ed il passaggio del segnale stesso in un punto ben determinato. Nel contesto della relatività speciale tali eventi hanno luogo in sistemi inerziali e, in questa premessa, è opportuno definire come un osservatore, *a riposo* su un sistema inerziale, possa descrivere correttamente un evento che si svolge in luoghi diversi da quello in cui lui si trova.

A tal fine, come illustrato nella Fig. 5, l'osservatore deve disporre di un reticolo di regoli di riferimento e di una serie di orologi sincronizzati con il suo. Per i regoli campione non vi sono difficoltà concettuali, mentre per la sincronizzazione occorre generalizzare la procedura descritta in precedenza con riferimento a due soli orologi. Gli orologi, infatti, vanno sincronizzati, uno ad uno, con l'orologio che si trova nella posizione dell'osservatore, inviando un segnale luminoso e tenendo conto dei tempi di percorrenza. (Va detto che all'Ufficio Brevetti di Berna - siamo in Svizzera - molte "pratiche" riguardavano la sincronizzazione degli orologi in aree vaste, e quasi tutte le domande di brevetto facevano riferimento a segnali luminosi e suggerivano procedure analoghe a quella appena descrit-

ta). Le coordinate spaziali e temporali degli eventi di interesse, una volta misurate vanno registrate ed i relativi valori vanno inviati all'osservatore.

In armonia con tali premesse, nel seguito si descrivono le conseguenze cinematiche del secondo postulato della relatività speciale sui ben noti concetti classici di simultaneità, tempo e lunghezza. Da un punto di vista qualitativo, tuttavia, si può già osservare che una qualunque velocità, inclusa la velocità della luce, deve essere un rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo. Di conseguenza, bisogna ammettere che anche la velocità della luce sia data da un rapporto del tipo

$$c = \frac{\text{spazio relativo}}{\text{tempo relativo}} \quad (6)$$

ovvero che, per mantenere costante il rapporto  $c$ , lo spazio percorso dalla luce e il tempo impiegato a percorrerlo diventino "relativi" e, quindi, siano diversi nei diversi sistemi inerziali. Pertanto, in ultima analisi ci si deve aspettare che due osservatori, posizionati su due sistemi inerziali in moto uno rispetto all'altro, non concordino sulle misure di intervallo di tempo e lunghezza ed, ovviamente, nemmeno sui giudizi di simultaneità (sintesi di valutazioni spazio-temporali).

## 4.1 Simultaneità

La simultaneità è relativa:

- due eventi che hanno luogo in punti diversi ed appaiono simultanei per un osservatore a riposo su un sistema inerziale, non sono simultanei per un altro osservatore che si trovi su un sistema inerziale in moto rispetto al primo.

Per convincersene, si consideri l'esperimento mentale proposto da Einstein e schematizzato nella Fig. 6. Un osservatore a riposo nella posizione  $C$  sulla piattaforma di una stazione ferroviaria (sistema inerziale  $S$ ), assiste al passaggio, con velocità costante  $v$ , di una carrozza ferroviaria (sistema inerziale  $S'$ ). La carrozza rappresentata in figura, trasporta un altro osservatore nella posizione  $C'$ , che si trova esattamente in mezzo tra la testa  $A'$  e la coda  $B'$ . Quando le posizioni dei due osservatori coincidono [situazione (a)], due fulmini colpiscono simultaneamente le coppie di punti  $A'$  ed  $A$  e  $B'$  e  $B$ .

L'osservatore  $C$ , a riposo sulla piattaforma, constata che, a causa del movimento del treno, il punto  $C'$  viene raggiunto per primo dal lampo di luce emesso in  $A$  [situazione (b)]. Successivamente i lampi emessi in  $A$  e  $B$  arrivano simultaneamente nella sua posizione  $C$  [situazione (c)] e, alla fine, anche il lampo emesso in  $B$  raggiunge  $C'$  [situazione (d)]. Pertanto, l'osservatore a riposo in  $C$  sul sistema inerziale  $S$  conclude che i due eventi sono stati simultanei per lui ma hanno avuto luogo uno dopo l'altro per l'osservatore in  $C'$ .

A questo punto, però, l'osservatore in  $C'$ , che a sua volta è a riposo sul sistema inerziale  $S'$ , si dichiara non d'accordo perché, secondo il suo punto di vista, è la piattaforma  $S$  a muoversi con velocità costante  $-v$  rispetto a  $S'$ . Pertanto, i lampi di luce emessi in  $A'$  e  $B'$  sono arrivati simultaneamente nella sua posizione  $C'$  (a metà tra  $A'$  e  $B'$ ) mentre, a causa del moto di  $S$ , la posizione  $C$  sulla piattaforma è stata raggiunta prima dal lampo emesso in  $B'$  e solo dopo dal lampo emesso in  $A'$ .

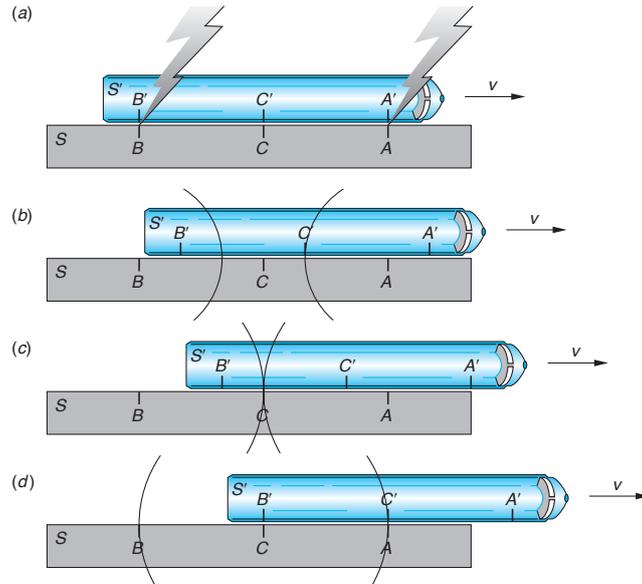


Figura 6: Due eventi simultanei nel sistema inerziale  $S$  della piattaforma, non sono simultanei nel sistema inerziale  $S'$  della carrozza. [P.A. Tipler e R.A. Lewellyn, *Modern Physics-VIth ed.*, W.A. Freeman and Company, New York, 2012]

Naturalmente entrambi gli osservatori hanno ragione. Essi sono a riposo su due sistemi inerziali diversi e, quindi, hanno titolo ad esprimere il proprio punto di vista: basta tener presente che la simultaneità di due eventi che accadono in punti distinti è legata al tempo di riferimento (o, se si vuole, al tempo *proprio*) di ciascun osservatore. Di conseguenza, la simultaneità per  $C$ , a riposo sulla piattaforma, è quella relativa a piattaforma ferma e carrozza in moto con velocità  $v$ , mentre la simultaneità per  $C'$ , a riposo sulla carrozza, è quella relativa a carrozza ferma e piattaforma in moto con velocità  $-v$ .

## 4.2 Dilatazione del tempo

L'intervallo di tempo trascorso tra due eventi è relativo in quanto dipende dall'osservatore. Per dimostrare un tale assunto ci si riferisca ancora a due osservatori: uno a riposo su una carrozza che passa con velocità relativa  $v$  rispetto alla piattaforma e l'altro a riposo sulla piattaforma. Per semplicità, tuttavia, non si rappresenti di nuovo l'intera geometria già descritta nel Paragrafo 4.1 ma, come in Fig. 7, ci si concentri sulle situazioni di interesse, ovvero sulle misure dell'intervallo di tempo trascorso tra due eventi che hanno luogo nella carrozza: l'emissione (evento 1) ed il ritorno (evento 2) di un lampo di luce.

L'osservatore sulla carrozza, al quale si fa riferimento nella figura a sinistra, misura un intervallo di tempo *proprio* tra partenza e arrivo del lampo di luce, in quanto utilizza un solo orologio a riposo, come lui, sulla carrozza. Attesa la costanza della velocità della luce, il risultato è

$$\Delta t_0 = 2 \frac{D}{c} \quad (7)$$

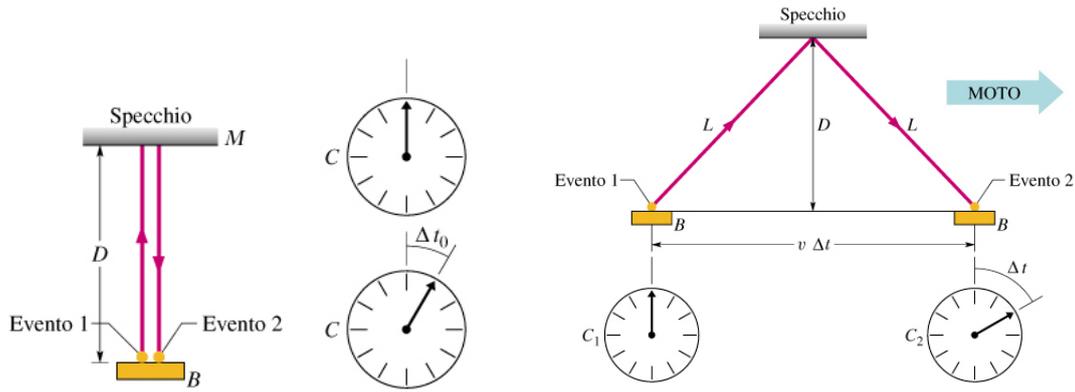


Figura 7: L'osservatore sulla carrozza, a sinistra, misura un intervallo di tempo proprio  $\Delta t_0$  tra i due eventi, mentre l'osservatore sulla piattaforma, a destra, misura un intervallo  $\Delta t$  che non è un intervallo di tempo proprio in quanto è determinato con due orologi sincronizzati che stanno in luoghi diversi. [D. Hallyday, R. Resnik e J. Walker; *Fundamentals of Physics-Xth ed.*, Wiley, 2014]

dove  $D$  è la distanza tra emettitore/ricevitore e specchio.

L'osservatore sulla piattaforma, al quale si fa riferimento nella figura a destra, vede una situazione completamente diversa poiché, a causa del movimento della carrozza, i percorsi del lampo di luce si allungano (essendo, evidentemente,  $L > D$ ). Inoltre, per misurare l'intervallo di tempo tra partenza e arrivo, deve usare due orologi sincronizzati che stanno in due luoghi diversi. Di conseguenza l'intervallo di tempo

$$\Delta t = 2 \frac{L}{c} \quad (8)$$

non è un intervallo di tempo proprio.

Applicando il teorema di Pitagora al semipercorso del lampo di luce e tenendo conto delle (7) e (8), si ottiene immediatamente

$$(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t_0)^2 \quad (9)$$

da cui, con un po' di algebra, si ricava

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t_0 \quad (10)$$

Nella (10)

$$\beta = v/c \quad (11)$$

è il rapporto (sempre minore di 1) tra velocità della carrozza e velocità della luce, mentre

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (12)$$

è un fattore di amplificazione (essendo sempre sempre maggiore di 1) che, al crescere di  $v$ , indica di quanto l'intervallo di tempo trascorso tra i due eventi sia più grande per

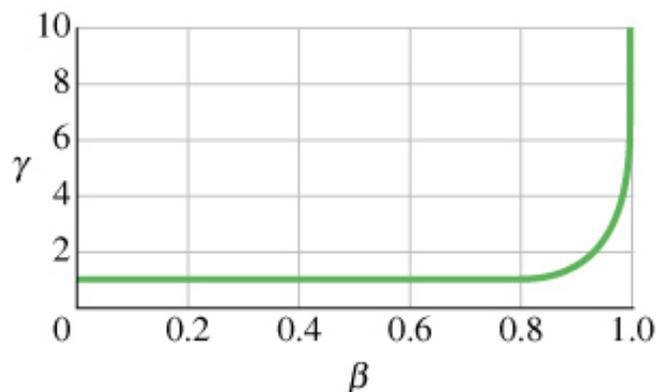


Figura 8: Fattore di amplificazione in funzione del rapporto di velocità  $\beta = v/c$ . [D. Hallyday, R. Resnik e J. Walker, *Fundamentals of Physics-Xth ed.*, Wiley, 2014]

l'osservatore fermo sulla piattaforma rispetto all'osservatore in moto relativo uniforme rispetto a lui sulla carrozza. La relazione finale (10), riscritta sinteticamente come

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (13)$$

viene, infatti, chiamata “dilatazione del tempo”.

Ancora una volta però, l'osservatore sulla carrozza si dichiara non d'accordo con le conclusioni raggiunte perché, secondo il suo punto di vista, è la piattaforma a muoversi con velocità costante  $-v$  rispetto a lui e quindi, per lui, è il tempo sulla piattaforma a scorrere più lentamente. (L'erba del vicino, si sa, è sempre più verde). Naturalmente entrambi gli osservatori hanno ragione perché, come detto all'inizio, l'intervallo di tempo trascorso tra due eventi dipende dall'osservatore e, quindi, è relativo.

Con riferimento alla Fig. 8 va notato, invece, che la dilatazione dei tempi, come tutti gli effetti relativistici, è praticamente trascurabile fino a  $\beta = v/c < 0,8$ , ovvero fino a velocità minori di 8/10 di quella della luce. Per la velocità della luce si ha  $c \approx 300.000$  km/s, e 8/10 della velocità della luce corrispondono a  $v \approx 240.000$  km/s (ovvero a meno di 2 secondi per il percorso di circa 384.000 chilometri tra la terra e la luna). Ciò nonostante, nella pubblicistica divulgativa è stato molto dibattuto il famoso “paradosso dei gemelli”, che diventerebbe di attualità solo con velocità  $v > 240.000$  km/s ovvero di gran lunga superiori alle possibilità offerte dalle tecnologie attuali.

#### 4.2.1 Paradosso dei gemelli

Come illustrato in Fig. 9, il gemello astronauta compie un viaggio spaziale (in un futuro molto lontano) a velocità prossima a quella della luce, mentre l'altro gemello resta sulla Terra. A causa della dilatazione del tempo, nell'astronave gli orologi ed i processi fisiologici vanno più a rilento rispetto alla Terra. L'astronauta di ritorno dal viaggio nel cosmo, quindi, ritrova il gemello invecchiato molto più velocemente di lui. (Ad esempio, con  $\beta = v/c = 0,99$  si avrebbe:  $\gamma = 10$  ed il gemello terrestre sarebbe invecchiato di dieci anni per ogni anno del gemello astronauta).



Figura 9: Partenza, viaggio nel cosmo e ritorno: al ritorno, l'astronauta è più giovane del gemello rimasto sulla Terra.

Fino a questo punto non vi sono contraddizioni con la teoria della relatività. La situazione diventa paradossale solo se si ricorda che la dilatazione del tempo è un effetto simmetrico. Se l'astronave fosse un sistema inerziale, l'astronauta a riposo su un tale sistema vedrebbe, infatti, la Terra muoversi rispetto a lui con velocità relativa  $-v$  e, quindi, si aspetterebbe di trovare il gemello meno invecchiato di lui. In realtà non è così perché l'astronave non è *sempre* un sistema inerziale in quanto, per tornare indietro, deve, almeno una volta, rallentare, invertire la rotta ed accelerare di nuovo. Pertanto, con gran gioia dei futuri astronauti (e rammarico dei gemelli terrestri), la situazione è proprio quella rappresentata nella figura.

### 4.3 Effetto Doppler relativistico

Con riferimento alla Fig. 10 si considerino due osservatori  $A$  e  $B$  a riposo su un sistema  $S$  con origine  $x = 0$  a metà dell'intervallo tra  $A$  e  $B$ . Una sorgente luminosa è posta nell'origine del sistema  $S'$  che scorre con velocità costante  $v$  rispetto ad  $S$ , a partire da un istante iniziale  $t = t' = 0$  nel quale le origini dei due sistemi coincidono. Pertanto, dal punto di vista dell'osservatore  $A$ , la sorgente  $S'$  si sta avvicinando mentre, dal punto di vista dell'osservatore  $B$ , la sorgente si sta allontanando.

Come si dimostra nel Paragrafo 4.3.1, quando sorgente e osservatore si avvicinano, l'osservatore percepisce un aumento di frequenza ed una diminuzione di lunghezza d'onda (essendo  $\lambda = c/f$ ). La relazione che si trova è

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > 1 \quad (14)$$

dove  $f$  è la frequenza percepita da  $A$ ,  $f_0$  è, la frequenza propria di emissione (ovvero la frequenza associata al sistema  $S'$  solidale con la sorgente) e  $\beta = v/c$  è il rapporto tra la velocità di avvicinamento  $v$  e la velocità della luce. Quindi, nel caso dell'osservatore  $A$  si usa dire che l'avvicinamento causa uno spostamento del colore della radiazione emessa verso lunghezze d'onda più piccole, ovvero verso il blu (in Inglese "blue shift").

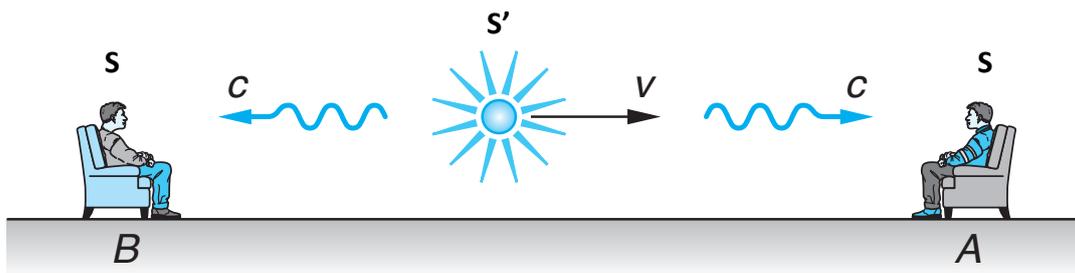


Figura 10: Effetto Doppler relativistico associato al movimento di una sorgente luminosa in  $S'$  rispetto a due osservatori a riposo sul sistema fisso  $S$ . Le origini dei due sistemi coincidono all'istante iniziale  $t = t' = 0$  mentre, successivamente,  $S'$  scorre con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$  di  $S$ . [P.A. Tipler e R.A. Lewellyn, *Modern Physics-VIth ed.*, W.A. Freeman and Company, New York, 2012]

Simmetricamente, nel Paragrafo 4.3.1 si dimostra che quando sorgente e osservatore si allontanano, l'osservatore percepisce una diminuzione di frequenza espressa da una relazione analoga alla (14), solo con i segni cambiati

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < 1 \quad (15)$$

dove  $f$  è la frequenza percepita da  $B$ ,  $f_0$  è, la frequenza propria di emissione (ovvero la frequenza associata al sistema  $S'$  solidale con la sorgente) e  $\beta = v/c$  è il rapporto tra la velocità di allontanamento  $v$  e la velocità della luce. Alla diminuzione di frequenza corrisponde un aumento di lunghezza d'onda (essendo  $\lambda = c/f$ ) e, quindi, nel caso dell'osservatore  $B$  si usa dire che l'allontanamento causa uno spostamento del colore della radiazione emessa verso lunghezze d'onda più grandi, ovvero verso il rosso (in Inglese "red shift"). Come aiuto mnemonico per non confondere i due effetti si può, allora, fare riferimento alla Fig. 11.

A conclusione del paragrafo possono essere interessanti due osservazioni. La prima riguarda l'effetto Doppler astronomico, in quanto lo spostamento verso il rosso delle radiazioni elettromagnetiche emesse dalle galassie è stato il primo indicatore dell'allontanamento tra le galassie stesse. Successivamente si è constatato che lo spostamento verso il rosso aumenta con la distanza intergalattica, e si è concluso che l'intero Universo si stesse espandendo. (L'analogia è quella di un volume in costante espansione nel quale aumentano le distanze tra i punti interni con velocità relativa proporzionale alle distanze reciproche).

La seconda osservazione è più "Terra-Terra" e riguarda il funzionamento dei radar Autovelox. Gli Autovelox emettono microonde ad una frequenza propria  $f_0$ . Un'auto che si avvicina ad un Autovelox intercetta l'onda con frequenza aumentata per effetto Doppler (avvicinamento relativo alla sorgente), e la riflette verso il radar che, a sua volta, la percepisce con un secondo aumento di frequenza (ulteriore avvicinamento relativo alla sorgente). Il sistema di elaborazione del segnale a corredo dell'Autovelox misura il rap-

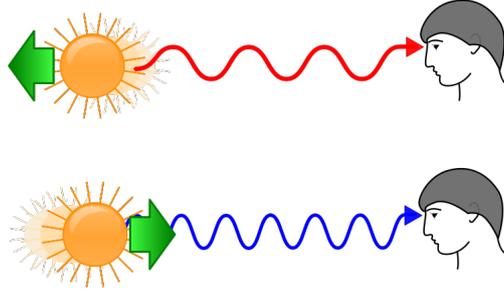


Figura 11: Spostamento verso il rosso delle radiazioni emesse da una sorgente in allontanamento, e verso il blu di una sorgente in avvicinamento.

porto tra la frequenza propria del segnale emesso e la frequenza del segnale ricevuto, e lo traduce in velocità dell'auto e possibili sanzioni.

#### 4.3.1 Dimostrazione dell'effetto Doppler relativistico\*

Come si è detto, dal punto di vista dell'osservatore  $A$  la sorgente  $S'$  si sta avvicinando e, nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  (misurato nel sistema fisso  $S$ ) necessario ad emettere  $n$  onde, la testa della prima onda percorre una distanza  $c\Delta t$  mentre  $S'$  si sposta di  $v\Delta t$ . La conclusione di  $A$  è che la lunghezza d'onda, ovvero l'estensione spaziale di una singola onda, sia pari a

$$\lambda = \frac{(c - v)\Delta t}{n} \quad (16)$$

La frequenza di un'onda luminosa è definita come  $f = c/\lambda$  e, di conseguenza, l'osservatore  $A$  conclude che

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{cn}{(c - v)\Delta t} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{n}{\Delta t} \quad (17)$$

dove, ricordiamolo, si ha  $\beta = v/c$ . La frequenza calcolata in base alla (17), tuttavia, non è una frequenza propria in quanto l'intervallo di tempo  $\Delta t$  deve, necessariamente, essere misurato mediante due orologi sincronizzati fissi in due posizioni diverse di  $S$ . La frequenza propria  $f_0$  è, infatti, quella associata al sistema  $S'$  dove l'intervallo di emissione  $\Delta t_0$  può essere misurato con un solo orologio solidale alla sorgente. Poiché la frequenza è l'inverso del periodo, si ha anche

$$f_0 = \frac{n}{\Delta t_0} \quad (18)$$

ed applicando la formula della dilatazione del tempo (10) al rapporto tra le frequenze (17) e (18), si ottiene

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (19)$$

ovvero la relazione (14) ripetuta per comodità

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} > 1$$

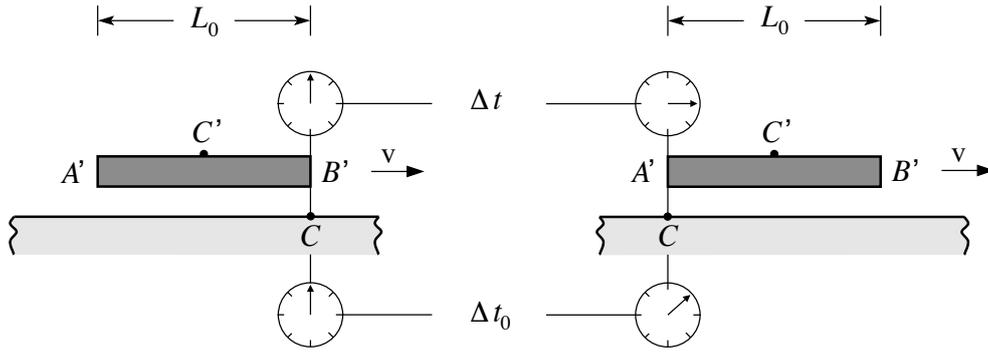


Figura 12: Contrazione delle lunghezze. L'osservatore sulla carrozza misura una lunghezza propria  $L_0$  del regolo che viaggia con lui, ma non un intervallo di tempo proprio in quanto utilizza due orologi sincronizzati che stanno in luoghi diversi. L'osservatore sulla piattaforma misura con il suo orologio un intervallo di tempo proprio  $\Delta t_0$ , ma valuta una lunghezza  $L$  non propria in quanto fa riferimento a due eventi che hanno luogo in due punti diversi del regolo.

Come si è già osservato, ripetendo gli sviluppi analitici per l'osservatore  $B$  si trova la relazione (15) che è analoga alla (14), solo con i segni cambiati.

#### 4.4 Contrazione delle lunghezze

I risultati delle misure di lunghezza sono relativi, in quanto dipendono dall'osservatore. In armonia con le procedure seguite nei Paragrafi 4.1 e 4.2, ci si riferisce ancora a due osservatori:  $C'$  a riposo su una carrozza che si muove con velocità (che scopriremo essere)  $v$  e trasporta un regolo campione, e  $C$  a riposo sulla piattaforma. Per semplicità, non si rappresenta l'intero sistema ma, come in Fig. 12, ci si concentra sulle due situazioni di interesse: i passaggi dei due estremi del regolo ( $B'$  a sinistra ed  $A'$  a destra) davanti a  $C$ .

L'osservatore sulla carrozza  $C'$  misura prima la lunghezza propria del regolo  $L_0$  (che si trova in quiete nel suo stesso sistema) e, successivamente, valuta con due orologi sincronizzati (che, come lui, stanno su  $S'$ ) l'intervallo di tempo  $\Delta t$  tra i due passaggi degli estremi del regolo davanti a  $C$ . Per effettuare la valutazione i due orologi devono stare uno all'inizio ed uno alla fine del regolo e, di conseguenza,  $\Delta t$  non è un intervallo di tempo proprio. Con i dati di cui dispone,  $C'$  valuta la velocità relativa della carrozza rispetto alla piattaforma

$$v = \frac{L_0}{\Delta t} \quad (20)$$

e la comunica a  $C$ .

L'osservatore sulla piattaforma  $C$ , a sua volta, misura l'intervallo di tempo  $\Delta t_0$  tra i due eventi utilizzando un solo orologio che, come lui, si trova in quiete sulla piattaforma e, di conseguenza,  $\Delta t_0$  è un intervallo di tempo proprio. Tale misura consente a  $C$  di valutare la lunghezza

$$L = v\Delta t_0 \quad (21)$$

della carrozza che gli passa davanti. (La  $L$  non è una lunghezza propria in quanto è valutata facendo riferimento a due misure relative a due punti diversi,  $A'$  e  $B'$ , del regolo).

Poiché i due osservatori devono concordare sul valore assoluto di  $v$ , si deve avere anche:

$$v = \frac{L_0}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t_0} \quad (22)$$

Dalla (22) si ricava immediatamente

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma} \quad (23)$$

e tale relazione, riscritta nella forma

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 \quad (24)$$

con  $1/\gamma$  sempre minore di 1, viene chiamata “contrazione delle lunghezze” in quanto l’osservatore  $C$  sulla piattaforma vede più corto il regolo in moto.

Al solito, l’osservatore sulla carrozza si dichiara non d’accordo con le conclusioni raggiunte perché, secondo il suo punto di vista, è la piattaforma a muoversi con velocità costante  $-v$  rispetto a lui e, quindi, proclama che sono le lunghezze sulla piattaforma a contrarsi. Ancora una volta entrambi gli osservatori hanno ragione perché, come detto all’inizio, i risultati delle misure di lunghezza dipendono dall’osservatore e, quindi, sono relativi.

## 4.5 Le trasformazioni di Lorentz\*

Come discusso nel Paragrafo 2.1, prima della relatività speciale il legame tra le coordinate di un punto in due sistemi di riferimento inerziali veniva descritto utilizzando le trasformazioni di Galileo. Tali trasformazioni, tuttavia, cadono in difetto nel contesto relativistico e, di conseguenza, devono essere sostituite da altre trasformazioni, dette di Lorentz, che forniscono praticamente gli stessi risultati quando le velocità sono molto inferiori a quelle della luce, ma continuano a valere anche quando le velocità sono confrontabili con quelle della luce. In gergo relativistico: le trasformazioni di Lorentz mettono in relazione, senza restrizioni di velocità, le coordinate spazio-temporali di un “evento” misurate da due osservatori in due sistemi inerziali  $S$  ed  $S'$ . Un modo conveniente per ricavare una versione geometricamente semplificata delle trasformazioni di Lorentz è quello di applicare quanto detto in precedenza alla descrizione di uno stesso evento spazio-temporale in  $S'$  ed  $S$  facendo riferimento, per praticità, alla Fig. 13 (che è, appunto, una versione semplificata della Fig. 2).

Come si vede,  $S'$  scorre con velocità costante  $v$  nella direzione  $x$  positiva rispetto ad  $S$ , partendo da una situazione, al tempo al  $t = t' = 0$ , nella quale le origini dei due sistemi coincidono. Nella cinematica Galileiana, l’osservatore a riposo su  $S$  avrebbe scritto

$$x = vt + x' \quad (25)$$

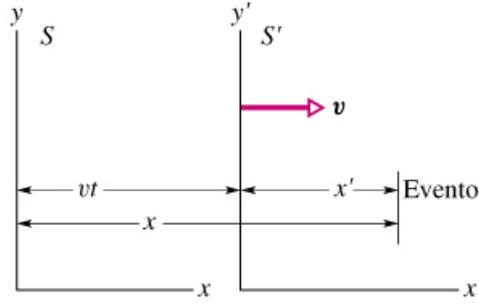


Figura 13: Sistemi inerziali con origini coincidenti all'istante iniziale  $t = t' = 0$ . Successivamente,  $S'$  scorre lungo l'asse  $x$  di  $S$  con velocità  $v$ .

Nel contesto relativistico, invece, la lunghezza  $x' = L_0$  (propria su  $S'$  che è in movimento rispetto ad  $S$ ) viene percepita più corta e pari a

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \frac{1}{\gamma} x' \quad (26)$$

sul sistema  $S$ . Di conseguenza, la relazione (25) diventa

$$x = vt + \frac{1}{\gamma} x' \quad (27)$$

e fornisce

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (28)$$

ovvero la trasformazione di Lorentz relativa alle coordinate spaziali  $(x', x)$ .

Per passare alla trasformazione di Lorentz relativa alle coordinate temporali  $(t', t)$ , si può osservare che, nella relatività, spazio e tempo non sono più indipendenti ma sono legati dalla costanza della velocità della luce. Nella situazione geometrica della Fig. 13 le relazioni tra spazio e tempo nei due sistemi  $S$  ed  $S'$  sono particolarmente semplici, dal momento che risulta

$$\begin{aligned} c &= x/t = x'/t' \\ x &= ct; \quad x' = ct' \\ t &= x/c; \quad t' = x'/c \end{aligned} \quad (29)$$

Utilizzando le (29) per scambiare le coordinate spaziali con quelle temporali, la (28) diventa

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \quad (30)$$

e tale relazione, dividendo entrambi i membri per  $c$ , fornisce

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \quad (31)$$

ovvero la trasformazione di Lorentz relativa alle coordinate temporali  $(t', t)$ .

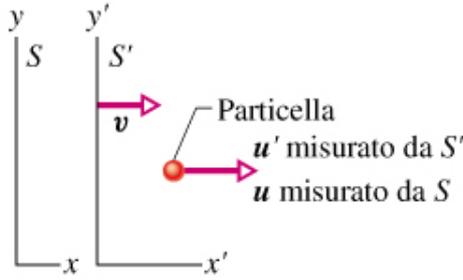


Figura 14: Il sistema  $S'$  si muove con velocità  $v$  rispetto al sistema  $S$  mentre, a sua volta, la particella si muove con velocità  $u'$  rispetto a  $S'$  e  $u$  rispetto a  $S$ . [D. Hallyday, R. Resnik e J. Walker, *Fundamentals of Physics-Xth ed.*, Wiley, 2014]

Se poi si vuole tener conto esplicitamente del fatto che, in generale, la velocità ha componenti anche rispetto agli assi  $(y', y)$  e  $(z', z)$ , nella situazione particolare di Fig. 13 si può scrivere le trasformazioni di Lorentz nella forma completa

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad \text{e} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (32)$$

che è omologa alla forma (1), utilizzata, nel Paragrafo 2.1 per le trasformazioni di Galileo.

Infine, se si vuole descrivere la situazione considerando  $S'$  fermo ed  $S$  che scorre nella direzione  $x'$  con velocità costante  $-v$  rispetto ad  $S'$ , basta sostituire, nelle (32),  $-v$  a  $v$  e scambiare le coordinate con indice con quelle senza indice (e viceversa). Insieme al precedente (32), il nuovo risultato

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad \text{e} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (33)$$

si presterà alle utilizzazioni illustrate nei paragrafi che seguono.

## 4.6 Somma relativistica delle velocità

Un modo conveniente per calcolare la somma relativistica delle velocità è mettere in relazione i risultati delle misure di velocità di una particella ottenuti da due osservatori: uno a riposo sul sistema  $S$  e l'altro a riposo sul sistema  $S'$ . Al solito, il sistema  $S'$  scorre con velocità costante  $v$  nella direzione  $x$  positiva rispetto ad  $S$ , partendo da una situazione, al tempo al  $t = t' = 0$ , nella quale le origini dei due sistemi coincidono.

Come indicato nella Fig. 14, in conseguenza delle ipotesi fatte l'osservatore in  $S'$  vede la particella muoversi con velocità pari a  $u'$  nella direzione  $x'$ , mentre l'osservatore in  $S$  vede la particella muoversi con velocità  $u$  nella direzione  $x$ . Evidentemente, la velocità  $u$  della particella rispetto ad  $S$  è la somma relativistica delle due velocità  $v$  e  $u'$ . Il valore di  $u$  è calcolabile in base alla *Regola di Einstein*

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (34)$$

ed è diverso da quello fornito dalla semplice somma Galileiana:  $u = u' + v$ . La dimostrazione della regola (34) non è banale e, di conseguenza, è riportata nel paragrafo asteriscato che segue. Qui si può, comunque, osservare che l'Eq (34) si riduce alla somma Galileiana nella “vita di tutti i giorni” nella quale i prodotti  $u'v$  sono molto minori del quadrato della velocità della luce. Inoltre, si può facilmente verificare che la somma relativistica di due velocità uguali alla velocità della luce  $c$  ha per risultato  $c$  (e non due volte la velocità della luce come la somma Galileiana).

#### 4.6.1 Dimostrazione della Regola di Einstein\*

Si faccia riferimento alle trasformazioni di Lorentz (33) qui riscritte per convenienza in forma sintetica

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Si calcoli poi la somma  $u$  partendo dalla definizione  $u = dx/dt$ , ma utilizzando i valori dei differenziali ricavati dalle trasformazioni di Lorentz sopra riportate e procedendo successivamente agli opportuni passaggi algebrici

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma} \frac{dx' + vdt'}{\gamma dt' + (v/c^2)dx'} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + (v/c^2)dx'} \frac{dt'}{dt'}$$

Il risultato finale è proprio

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$$

ovvero la “regola di Einstein”.

## 4.7 Invarianza dell'intervallo spazio-temporale

Nella Fisica Classica il tempo e lo spazio sono assoluti ed immutabili e, di conseguenza, non dipendono dal sistema di riferimento nel quale si trova un osservatore a riposo. Nella teoria della relatività speciale, al contrario, vale come postulato la costanza della velocità della luce e, di conseguenza, simultaneità, intervallo temporale e lunghezza (ovvero intervallo di spazio) cambiano con il sistema di riferimento nel quale si trova un osservatore a riposo.

Dalle trasformazioni di Lorentz, tuttavia, emerge anche l'esistenza di una quantità: l'intervallo spazio-temporale che è *invariante*, ovvero assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. In questo senso, nel contesto della relatività speciale è lecito parlare di spaziotempo (invece di spazio-tempo), ovvero di spazio a quattro dimensioni: tre spaziali ed una temporale.

Se, per semplicità, si fa riferimento ad una sola dimensione spaziale lo spaziotempo risulta avere due dimensioni e, in una forma che ricorda il teorema di Pitagora, l'intervallo spazio-temporale si può esprimere come

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad (35)$$

nel sistema di riferimento  $S$ , e come

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \quad (36)$$

nel sistema di riferimento  $S'$  in moto relativo uniforme rispetto ad  $S$ . Naturalmente l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale richiede che si abbia

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \quad (37)$$

in tutte le coppie di sistemi di riferimento in moto uniforme uno rispetto all'altro.

#### 4.7.1 Dimostrazione dell'invarianza spazio-temporale\*

Differenziando le trasformazioni di Lorentz, scritte in forma ridotta, si ottiene

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t); \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \quad (38)$$

dalla (32), e

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'); \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \quad (39)$$

dalla (33). Dividendo membro a membro la (38) per la (39) si ha

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{\Delta x' - v\Delta t'}{\Delta x' + v\Delta t'}; \quad \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\Delta t - (v/c^2)\Delta x}{\Delta t' + (v/c^2)\Delta x'} \quad (40)$$

Nelle due relazioni (40) si eseguono le moltiplicazioni incrociate ed, inoltre, nella relazione di destra si moltiplicano entrambi i membri per  $c^2$  per arrivare alla

$$(\Delta x')^2 + v\Delta x'\Delta t' = (\Delta x)^2 - v\Delta x\Delta t; \quad (c\Delta t')^2 + v\Delta x'\Delta t' = (c\Delta t)^2 - v\Delta x\Delta t \quad (41)$$

Infine, sottraendo membro a membro la relazione di sinistra da quella di destra, si arriva alla

$$(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \Rightarrow (\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 \quad (42)$$

che dimostra la (37).

## 4.8 Lo spaziotempo di Minkowski

Per semplicità, si faccia ancora riferimento alla sola coordinata spaziale  $x$  di modo che lo spaziotempo  $(ct, x)$  risulti avere due sole dimensioni e, nel sistema di riferimento  $S$ , il relativo intervallo spazio-temporale si possa esprimere in base alla (35) qui ripetuta per comodità:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

In tale contesto, si faccia riferimento a due eventi: l'evento 1 che ha luogo nel punto  $ct = x = 0$  e l'evento 2 che ha luogo nel punto  $(c\Delta t, \Delta x)$ . In situazioni di questo tipo è pratica comune rappresentare i due eventi su un diagramma con il tempo in ascisse (orizzontale) e lo spazio in ordinate (verticale). Per tradizione, invece, nello spaziotempo di Minkowski la convenzione è invertita e lo spazio è riportato in ascisse mentre il tempo, moltiplicato per la velocità della luce, è riportato in ordinate. Di conseguenza, i due eventi vengono rappresentati come indicato nella Fig. 15 dove, ferma restando la posizione di 1 nell'origine, si può facilmente determinare il valore assunto da  $(\Delta s)^2$  al variare della posizione dell'evento 2.

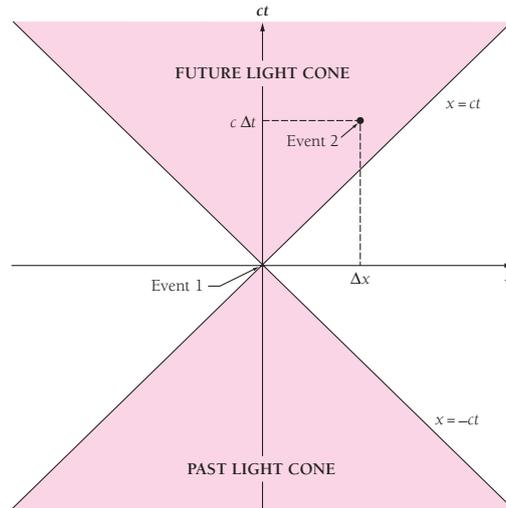


Figura 15: Il passato e il futuro nello spaziotempo dell'evento 1. [A. Beiser, *Concepts of Modern Physics - VI ed., McGraw-Hill, Boston, 2003*]

Se si ha

$$c|\Delta t| > |\Delta x| \quad (43)$$

si ottiene  $(\Delta s)^2 > 0$  e l'intervallo spazio-temporale viene definito **intervallo di tipo tempo** in quanto un segnale può andare dal punto 1 al punto 2 (e viceversa) viaggiando a velocità inferiore a quella della luce. Pertanto, i due eventi 1 e 2 potrebbero, in linea di principio, essere collegati da un relazione di causa ed effetto.

Se si ha

$$c\Delta t = \Delta x \quad (44)$$

si ottiene  $(\Delta s)^2 = 0$  e l'intervallo spazio-temporale viene definito **intervallo di tipo luce** in quanto un segnale può andare dal punto 1 al punto 2 (e viceversa) solo viaggiando alla velocità della luce. Pertanto è facile convincersi che il luogo degli eventi 2, potenzialmente collegati da una relazione di causa all'evento 1, è la zona colorata incluso tra le due rette inclinate di  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$  nella Fig. 15. (Per tutti i punti su tali rette, infatti, si ha:  $c|\Delta t| = |\Delta x|$  e, quindi, il valore assoluto dell'inclinazione delle rette è proprio di  $45^\circ$ ).

Se si ha

$$c|\Delta t| < |\Delta x| \quad (45)$$

si ottiene  $(\Delta s)^2 < 0$  e l'intervallo spazio-temporale viene definito **intervallo di tipo spazio** in quanto la distanza spaziale tra 1 e 2 è talmente grande che nessuna informazione in partenza da 1 può raggiungere 2 prima che l'evento sia avvenuto: per farlo dovrebbe, infatti, viaggiare più veloce della luce. Pertanto gli eventi 2, esterni alla zona colorata nella Fig. 15, non possono appartenere ne' al futuro ne' al passato dell'evento 1.

Il percorso di una particella nello spaziotempo è comunemente definito **linea d'universo della particella**. Come indicato nella Fig. 16 le linee d'universo

- di particelle che viaggiano a velocità costante inferiore a quella della luce sono rappresentate da rette del tipo  $\overline{OP}$  o  $\overline{OQ}$ , dove  $\overline{OP}$  si riferisce a una particella

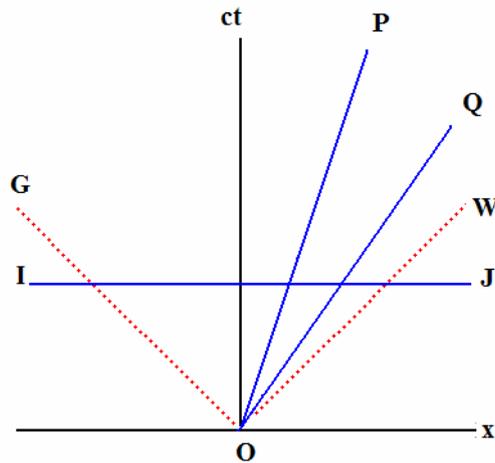


Figura 16: Diagramma spaziotempo di linee d'universo di particelle che viaggiano a velocità costante. [N. Penha e B. Rothenstein, *Special Relativity properties from Minkowski diagrams*, 2007]

relativamente lenta mentre  $\overline{OQ}$  si riferisce a una particella relativamente veloce (essendo la velocità inversamente proporzionale alla pendenza, data la scelta degli assi coordinati);

- di fotoni, che viaggiano alla velocità della luce, sono rappresentate da una delle due rette  $\overline{OW}$  o  $\overline{OG}$  inclinate, rispettivamente, a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  a seconda del verso ( $x$  positive o negative);
- di una particella ferma nell'origine è la retta verticale (asse delle ordinate).

Ancora, eventi simultanei sono collegati da rette orizzontali del tipo  $\overline{IJ}$  e, di conseguenza, l'asse delle ascisse rappresenta il luogo di tutti gli eventi che accadono all'istante iniziale. Infine, una particella che passa per l'origine all'istante  $t = 0$  ha una linea d'universo del tipo di quella rappresentata in Fig. 17 perché nessun oggetto materiale può viaggiare a velocità superiori a quella della luce e, quindi, in nessun punto l'inclinazione della traiettoria può essere inferiore, in valore assoluto, a  $45^\circ$ . Pertanto la particella deve venire dal passato ed andare verso il futuro restando entro lo spazio colorato, in quanto nessuno degli eventi che accadono nello spazio chiaro può avere influenza sulla sua traiettoria.

## 5 Conseguenze dinamiche

Come si è visto, i postulati di Einstein hanno costretto a modificare profondamente i concetti della cinematica classica riguardanti simultaneità, tempo e lunghezza. Ovviamente, tali cambiamenti hanno comportato conseguenze importanti anche nell'ambito della dinamica classica e, nel seguito, ci si occuperà delle nuove formulazioni dei concetti riguardanti quantità di moto, massa ed energia. Purtroppo la trattazione di tali argomenti, pur mantenuta a un livello elementare, richiede alcune nozioni di calcolo integrale. Di

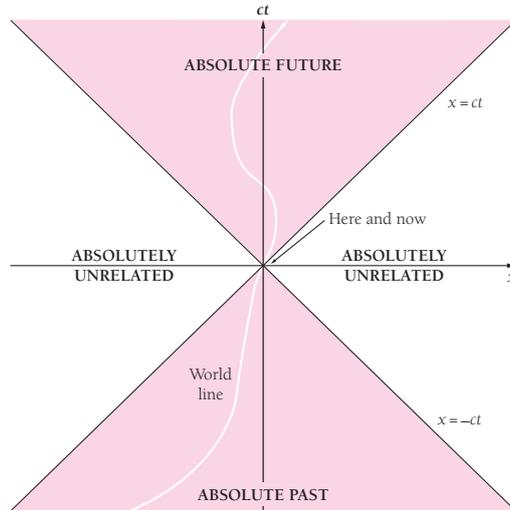


Figura 17: Linea d'universo di una traiettoria generica nello spaziotempo. [A. Beiser, *Concepts of Modern Physics - VI ed., McGraw-Hill, Boston, 2003*]

conseguenza, i lettori che non hanno familiarità con le definizioni di derivata e integrale dovranno rinunciare agli sviluppi analitici e limitarsi alle conclusioni, peraltro chiare, evidenziate nei vari paragrafi.

### 5.1 Quantità di moto

Nella Meccanica Classica la quantità di moto è definita come prodotto della massa per la velocità

$$p = mv \tag{46}$$

La grandezza risultante

- è “conservativa” in quanto rimane uguale nel tempo in assenza di forze esterne, mentre
- varia nel tempo in presenza di una forza esterna con risultante  $F$ , in armonia con il secondo principio della dinamica

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \tag{47}$$

L'importanza delle due proprietà sopra citate deriva dalle loro conseguenze. Ad esempio, un urto tra due corpi deformabili caratterizzati da quantità di moto uguali in valore assoluto ma con velocità di segno opposto, porta all'annullamento delle velocità per “conservare” la somma delle due quantità di moto (e, ad esempio, sfasciare due auto coinvolte in uno scontro frontale).

L'applicazione di una forza ad un corpo di massa costante conduce alla legge di Galileo

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \tag{48}$$

secondo cui “la forza è pari al prodotto della massa per l’accelerazione”, essendo quest’ultima la velocità di variazione della velocità nel tempo. Tuttavia, a differenza della (48), la (47) ha portata del tutto generale in quanto continua a valere anche in presenza di una massa variabile (che si incontra, ad esempio, quando si analizza il moto di un razzo alimentato da combustibile e comburente trasportati a bordo).

Con riferimento all’ambito specifico di cui qui ci si occupa, si potrebbe poi dimostrare (anche se, per brevità, la dimostrazione non è riportata) che la quantità di moto definita dalla (46) non è conservativa nel contesto relativistico. Per mantenere la proprietà di conservazione della quantità di moto in ambito relativistico, si deve valutare la velocità  $v$  utilizzando lo spostamento  $dx$  misurato nel sistema fisso del *laboratorio*, ma si deve usare il tempo “proprio” del sistema in moto che, in base alla (10), scorre più lentamente del tempo nel sistema fisso. In questo modo dalla (10) si ricava

$$dt_0 = dt\sqrt{1 - (v/c)^2} = dt\sqrt{1 - \beta^2} \quad (49)$$

che, sostituita nella definizione (46) modificata, fornisce

$$p = m \frac{dx}{dt_0} = m \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma mv \quad (50)$$

dove  $\gamma$  è il fattore di amplificazione definito dalla (12). Chiaramente, per velocità molto inferiori a quella della luce ( $v/c \ll 1$ ) si ha  $\gamma \approx 1$  e la definizione relativistica (50) si riduce alla definizione classica (46).

La relazione (50) è conservativa in ambito relativistico, ma al posto delle dimostrazioni formali di questo fatto (incompatibili con una trattazione elementare) può essere utile approfondire la logica della definizione stessa. A tal fine si può far riferimento, ad esempio, a un viaggio del futuro a velocità prossime a quella della luce. Quando il pilota dell’astronave comunica ai passeggeri la velocità dell’astronave insieme al tempo di viaggio rimanente prima dello scalo più prossimo, è molto probabile che faccia riferimento alla velocità dell’astronave valutata nel sistema astronomico fisso, ma comunichi il tempo di viaggio *proprio* (suo e dei passeggeri, in quanto tutti sono interessati a sapere se il pranzo potrà essere servito prima dell’arrivo).

Per tornare dalla fantascienza alla scienza, si possono citare gli esperimenti del CERN, nei quali le particelle sub-atomiche vengono portate a velocità prossime a quella della luce. In tal caso la velocità delle particelle viene valutata nel sistema fisso del laboratorio, mentre è evidente che la vita residua delle particelle è condizionata dallo scorrere del tempo proprio di ciascuna particella.

## 5.2 Dalla quantità di moto all’energia cinetica\*

L’energia cinetica  $K$  di una particella a massa costante è pari al lavoro meccanico  $L$  necessario per portare la particella dallo stato di riposo alla velocità  $v$ . (In questo paragrafo e nei successivi, si adotta la convenzione “Meccanica” di considerare positivo il lavoro fatto sul sistema). In base alla definizione, nel caso classico si ha

$$dK = dL = F dx = \frac{dp}{dt} dx = v dp = mv dv \quad (51)$$

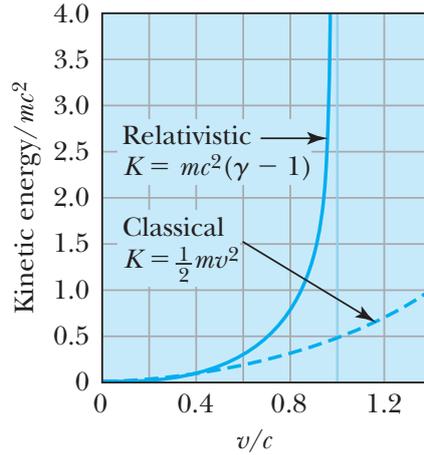


Figura 18: Espressioni adimensionali dell'energia cinetica classica e relativistica con  $v/c$  in ascisse e  $K/(mc^2)$  in ordinate. Ovviamente, è corretta solo la espressione relativistica che presenta un asintoto a  $v/c = 1$ . [S.T. Thornton e A. Rex, *Modern Physics for Scientists and Engineers-IVth ed.*, Cengage Learning, Boston, 2013.]

e, quindi, risulta

$$K = L = \int_0^v mv \, dv = \frac{1}{2}mv^2 \quad (52)$$

Nel caso dell'energia cinetica relativistica, dalla definizione (50) di quantità di moto si ha

$$dp = d \left[ \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right] = m \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} dv \quad (53)$$

e

$$dK = dL = F \, dx = \frac{dp}{dt} dx = v dp = mv \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} dv \quad (54)$$

Eseguendo l'integrazione, ad esempio con l'aiuto di un software di calcolo simbolico come Mathematica, si ottiene

$$K = L = \int_0^v mv \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} dv = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2 \quad (55)$$

ovvero la definizione relativistica dell'energia cinetica.

Nonostante l'aspetto molto diverso, la definizione relativistica (55) si riduce a quella classica (52) per velocità molto inferiori a quella della luce ( $v/c \ll 1$ ). A tal fine, si può far riferimento allo sviluppo in serie del radicale al denominatore nel quarto membro della (55), e utilizzare l'approssimazione

$$(1 + \xi)^n \approx 1 + n\xi \quad (56)$$

per  $\xi = v/c \ll 1$ . Quindi, con  $n = -(1/2)$  si ha

$$\gamma = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (57)$$

Sostituendo nella (55), si riottiene

$$K \approx \frac{1}{2}mv^2 \quad (58)$$

ovvero l'espressione classica approssimata.

Le espressioni dell'energia cinetica, classica e relativistica, sono diagrammate nella Fig. 18. Come si vede, le due curve sono indistinguibili per bassi valori del rapporto  $v/c$ , ma divergono considerevolmente all'aumentare di tale rapporto. Nella meccanica classica sono permessi valori del rapporto  $v/c$  anche molto più grandi dell'unità, ma nel contesto relativistico l'energia cinetica presenta un asintoto a infinito per  $v/c = 1$ . Pertanto, il lavoro necessario per portare la velocità  $v$  di una particella da 0 a  $c$  è infinitamente grande e, di conseguenza, la velocità  $v = c$  rappresenta un limite invalicabile anche dal punto di vista energetico.

### 5.2.1 Interpretazione geometrica\*

Dalla definizione relativistica (50) di quantità di moto, passando al quadrato e moltiplicando i due membri per  $c^2$  si ottiene in sequenza

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 m^2 c^4 \beta^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 \end{aligned} \quad (59)$$

La (59) viene anche scritta nelle forme

$$(\gamma mc^2)^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad (60)$$

e

$$\gamma mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \quad (61)$$

che ben si prestano all'interpretazione geometrica evidenziata in Fig. 19.

Nel triangolo rettangolo di figura, infatti, la base e l'altezza sono proporzionali, rispettivamente, a  $mc^2$  e  $pc$ , mentre l'ipotenusa è proporzionale a  $\gamma mc^2$ . Di conseguenza, sottraendo il segmento di base all'ipotenusa e tenendo conto della (55) si può evidenziare, per differenza, l'energia cinetica  $K = (\gamma - 1)mc^2$ . Allora, girando il ragionamento, risulta chiaro che l'ipotenusa è proporzionale anche all'energia totale  $E$  della particella che, necessariamente è somma di energia cinetica  $K$  e di una forma di energia, associata alla massa:  $mc^2$ , presente solo in ambito relativistico. In formule, dall'interpretazione geometrica si deduce che

$$\gamma mc^2 = K + mc^2 \equiv E \quad (62)$$

mentre si può anticipare che, nel Paragrafo 5.2.2, l'energia associata alla massa verrà definita energia a riposo  $mc^2 \equiv E_0$ .

Inoltre, è facile verificare che nel triangolo rettangolo di figura si ha anche

$$\text{sen } \theta = \frac{pc}{\gamma mc^2} = \frac{\gamma mvc}{\gamma mc^2} = \frac{v}{c} = \beta \quad (63)$$

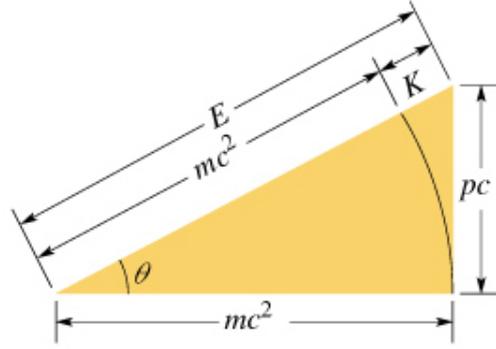


Figura 19: Rappresentazione geometrica della relazione tra energia totale  $E = \gamma mc^2$ , energia cinetica  $K = E - mc^2$  e quantità  $pc$  e  $mc^2$ . (Nel Paragrafo 5.2.2 la quantità  $mc^2$  verrà definita “energia a riposo”  $E_0$ ). [D. Hallyday, R. Resnik e J. Walker, *Fundamentals of Physics-Xth ed.*, Wiley, 2014]

e

$$\cos \theta = \frac{mc^2}{\gamma mc^2} = \frac{1}{\gamma} \quad (64)$$

Infine, è importante notare che dalle (61) e (62) si ottiene

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \quad (65)$$

nel caso generale e

$$E = pc \quad (66)$$

nel caso particolare di particelle prive di massa come i fotoni. A tale proposito, tuttavia, è opportuno notare che i fotoni, pur privi di massa possiedono energia. L’energia  $E$  posseduta dai fotoni, infatti, è legata alla frequenza  $f$  delle radiazioni emesse dalla legge di Planck

$$E = fh \quad (67)$$

dove  $h \cong 6,63 \cdot 10^{-34}$  joule per secondo [J s] è la costante di Planck. Pertanto, si deve ammettere che i fotoni (come del resto tutte le particelle prive di massa ma dotate di energia) viaggino alla velocità della luce in modo da avere  $\gamma = \infty$  nella (62) e poter scrivere

$$E = \gamma mc^2 = pc \neq 0 \quad (68)$$

[Formalmente, scandalizzando i matematici, si può affermare che nella (68) il prodotto  $\gamma m = \infty \cdot 0$ , essendo indeterminato, può risultare e, infatti, risulta diverso da zero].

### 5.2.2 Energia cinetica, energia totale ed energia a riposo

Ai fini di questo paragrafo, è conveniente partire dall’espressione relativistica (55) dell’energia cinetica evidenziando il quarto e il quinto membro

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 \quad (69)$$

Il secondo e il terzo membro della (69), infatti, ben si prestano a definire l'energia totale

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma mc^2 \quad (70)$$

e l'energia a riposo

$$E_0 = mc^2 \quad (71)$$

A sua volta, attese la (70) e la (71), la (69) conduce alle due relazioni equivalenti

$$K = E - E_0 \quad \Rightarrow \quad E = K + E_0 \quad (72)$$

il cui significato fisico è chiaramente “leggibile”

- a sinistra: in ambito relativistico, l'energia cinetica è la differenza tra energia totale ed energia a riposo, e
- a destra: in ambito relativistico, l'energia totale è la somma di energia cinetica ed energia a riposo.

Pertanto, anche il significato fisico dell'energia a riposo, emerge chiaramente in quanto:

- nel caso di una massa a riposo, si ha  $K = 0$  ed  $E = E_0$  ed, allora,  $E_0$  è l'energia posseduta da un corpo a riposo per il semplice fatto di avere una massa.

Inoltre, già in precedenza si era osservato che la relazione (71), generalmente citata come:  $E = mc^2$  (con il pedice “0” sottinteso) è, forse, la formula più famosa della Fisica.

Infine, può essere opportuna notare che, in analogia con la (72), il primo ed il terzo membro della (70) vengono spesso utilizzati per definire la “massa equivalente”:

$$m_{eq} = \gamma m = \frac{E}{c^2} \quad (73)$$

In generale, si può dire che la (73) sottolinea, ancora una volta, l'equivalenza relativistica tra massa ed energia. Tuttavia, nel caso particolare di particelle come i fotoni, che essendo prive di massa viaggiano sempre alla velocità della luce (come dimostrato nel Paragrafo 5.2.1), il secondo membro diventa indeterminato ( $\gamma m = \infty \cdot 0$ ) ma il terzo membro continua a valere e viene, infatti, utilizzato per definire la massa equivalente delle radiazioni elettromagnetiche.

## 6 Relatività Generale

Nemmeno dopo l'anno magico 1905 Einstein trovò un posto di insegnante e, di conseguenza, rimase all'Ufficio Brevetti di Berna dove fu promosso “funzionario di seconda classe a far tempo dal primo aprile 1906” (il burocratese è giustificato dal fatto che la promozione era dovuta al conferimento formale del dottorato di ricerca all'Università di Zurigo in data 15 gennaio 1906). Nel 1907, comunque, Einstein chiese l'abilitazione alla libera docenza all'Università di Berna, allegando alla domanda 17 lavori (inclusi i due sulla relatività speciale e quello sull'effetto fotoelettrico che fu premiato con il Nobel nel

1921). La domanda fu, però, respinta il 17 giugno 2007 in quanto il “richiedente” non aveva presentata, ritenendola giustamente superflua nel suo caso, la “tesi di abilitazione” (ovvero un lavoro non ancora pubblicato che la commissione avrebbe dovuto valutare). L’anno successivo, tuttavia, Einstein decise di piegarsi alla burocrazia e scrisse la tesi di abilitazione, ottenendo così la nomina a *Privatdozent* il 27 febbraio 2008. Ma la docenza “libera” consentiva solo di tenere corsi all’Università pagati da chi li frequentava, ed Einstein riuscì ad attrarre pochi studenti (tre, in realtà, e tutti colleghi dell’Ufficio Brevetti). Rimase allora all’Ufficio Brevetti fino al 1909 quando, quattro anni dopo aver rivoluzionato la fisica, fu finalmente nominato professore associato di fisica teorica all’Università di Zurigo.

Nel frattempo, però, fama e stima dei Fisici di tutto il Mondo erano talmente cresciute che, dopo gli inizi stentati, la velocità di avanzamento nella carriera universitaria di Einstein divenne, a dir poco, stupefacente. Nel 1911 fu nominato professore ordinario nella sezione in lingua tedesca dell’Università Carolina di Praga (la più antica università centro-europea), nel 1912 fu chiamato al Politecnico di Zurigo, e nel 1914 fu nominato direttore dell’Istituto di Fisica Kaiser Wilhelm (oggi Max Planck) di Berlino, nonché professore all’Università Humbolt sempre di Berlino (e, raro riconoscimento per un docente di appena 35 anni, fu dispensato dalla maggior parte degli obblighi didattici). Nello stesso anno fu accolto all’Accademia Prussiana delle Scienze dove nel 2015 presentò, come si è detto, una serie di memorie sulla relatività generale e, nel 1916 (l’anno in cui pubblicò il lavoro di sintesi “Fondamenti della teoria della relatività generale”) fu nominato Presidente della Società Tedesca di Fisica.

Come si evince da quanto appena detto, nel periodo che va dal 1905 al 1915, Einstein non riposò sugli allori ma si pose, da subito, due obiettivi molto ambiziosi

- completare la relatività speciale estendendone i principi ai sistemi che si muovono con moto accelerato uno rispetto all’altro e, soprattutto,
- formulare una nuova teoria della gravitazione.

All’anno magico 1905 seguirono, infatti, 10 anni di duro lavoro, ma il risultato fu la teoria della relatività generale, definita da alcuni “la teoria più bella mai formulata”. In essa

- massa inerte e massa gravitazionale sono unificate dal “principio di equivalenza”, mentre
- la gravitazione è interpretata come una proprietà geometrica dello spaziotempo (ovvero dello spazio e del tempo considerati insieme in armonia con quanto previsto dalla relatività speciale).

Einstein, “a posteriori”, definì la Relatività Generale “il lavoro più difficile della mia carriera” poiché, per arrivare ad una teoria della gravitazione soddisfacente, dovette ricorrere a concetti geometrici astratti e ad un apparato matematico complesso come il calcolo tensoriale. Qui non si tenterà di descrivere in dettaglio gli algoritmi utilizzati, ma si cercherà di mostrare come sia possibile comprendere i principi fondamentali della teoria attraverso una serie di esperimenti mentali (in gran parte proposti dallo stesso Einstein) ed alcuni grafici rappresentativi dei più significativi risultati ottenuti.

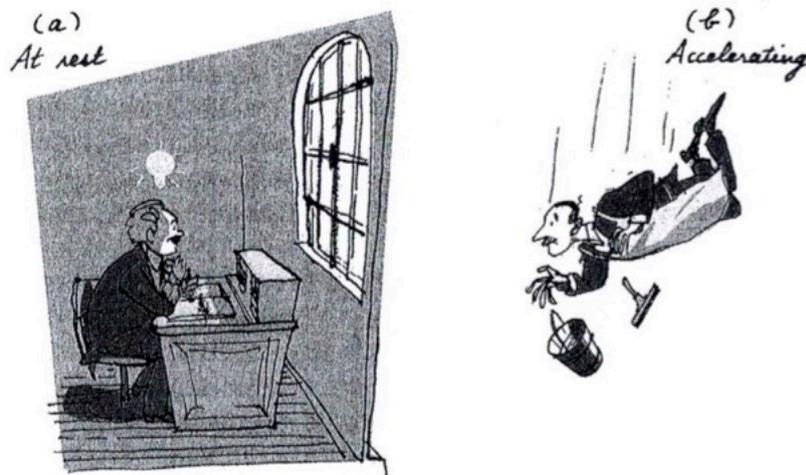


Figura 20: L'uomo che cade dal tetto passando davanti alla finestra di Einstein "non avverte il suo peso".

## 6.1 L'uomo che cade dal tetto

Nel 1907, quando la formulazione della relatività generale sembrava finita in un "vicolo cieco", Einstein ebbe l'intuizione che poi definì "l'idea più brillante della mia vita". Si trattava dell'esperimento mentale illustrato nella Fig. 20, così descritto dallo stesso Einstein

- "Ero seduto sulla mia sedia all'Ufficio Brevetti quando, all'improvviso, pensai che se una persona fosse scivolata dal tetto non avrebbe avvertito il suo peso durante tutta la fase di caduta. Questa semplice idea mi fece un'impressione profonda, e divenne la base della mia teoria della gravitazione".

(Noi, forse, avremmo pensato al "dopo caduta" ma, evidentemente, la genialità ha categorie diverse).

## 7 Principio di Equivalenza

Il Principio di Equivalenza nasce dall'esperimento mentale prima descritto e viene così formulato

- "un campo gravitazionale omogeneo è completamente equivalente ad un sistema di riferimento uniformemente accelerato".

Per approfondire il significato di tale principio può essere utile fare riferimento alla Fig. 21, nella quale è illustrata una versione moderna, non cruenta e più estesa, dell'intuizione sull'uomo che cade dal tetto. La figura mostra come le misure sperimentali effettuate nell'astronave in moto uniformemente accelerato e quelle effettuate nella stessa astronave

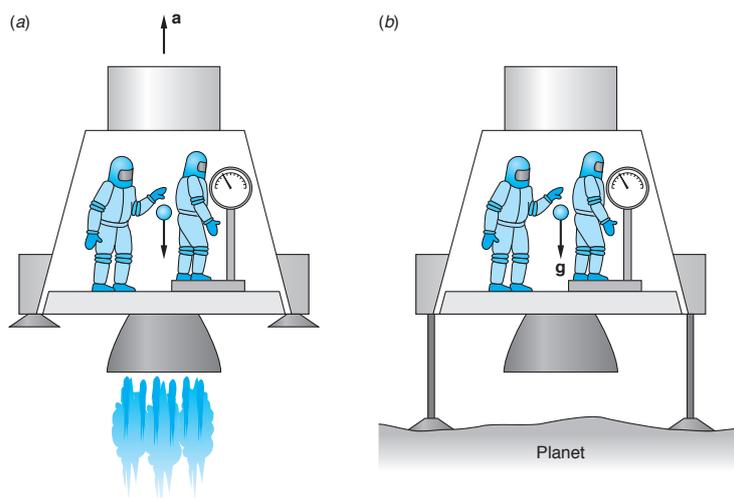


Figura 21: Versione aggiornata (e incolorata) della situazione di Fig. 20: i risultati degli esperimenti nel sistema di riferimento accelerato (a) non sono distinguibili da quelli nel campo gravitazionale (b), purché si abbia  $a = -g$ . [P.A. Tipler e R.A. Lewellyn, *Modern Physics-VIth ed.*, W.A. Freeman and Company, New York, 2012]

ferma su un pianeta diano gli stessi risultati, purché si abbia  $a = -g$ , ovvero un'accelerazione uguale in valore assoluto ma di verso opposto alla gravità. Nel caso (a), infatti, gli oggetti cadono con accelerazione

$$g = -a$$

e, sulla bilancia, gli astronauti leggono valori assoluti del proprio peso  $ma = mg$ .

$$ma = mg$$

Poiché gli esperimenti non permettono di distinguere tra massa inerte e massa gravitazionale, Einstein concluse che massa inerte e massa gravitazionale sono la stessa cosa. Inoltre, dal momento che la relatività speciale vale in presenza di campi gravitazionali, girando il ragionamento concluse che la validità deve continuare anche nel caso di sistemi in movimento accelerato uno rispetto all'altro.

A questo punto, un lettore particolarmente attento potrebbe aver osservato che le situazioni di Fig. 20 e 21 (a) riguardano il moto rettilineo e non il moto curvilineo, ovvero non riguardano, per citare Galileo, il moto "fluttuante in qua e in là". Per convincersi del fatto che nel moto rotante l'accelerazione centrifuga sostituisce l'accelerazione di gravità si può fare riferimento all'anello in rotazione, rappresentato nella Fig. 22 (a sinistra), che crea la gravità in "2001 Odissea nello Spazio". La spiegazione è riassunta nella Fig. 22 (a destra) dove sono evidenziate la "forza inerziale centrifuga"  $F$  e la forza centripeta  $R$ , ovvero la reazione del pavimento su cui fa "jogging" l'astronauta. In questo caso, l'accelerazione centrifuga  $a_c$  è omologa dell'accelerazione di gravità  $g$  essendo:  $g = a_c$ , mentre il "peso artificiale"  $mg$  è contrastato, come si è detto, dalla reazione  $R$  del pavimento. (Si noti che la forza inerziale centrifuga non è una forza vera e propria ma un effetto inerziale poiché ogni massa rotante, in questo caso l'astronauta, tende a proseguire nel moto rettili-

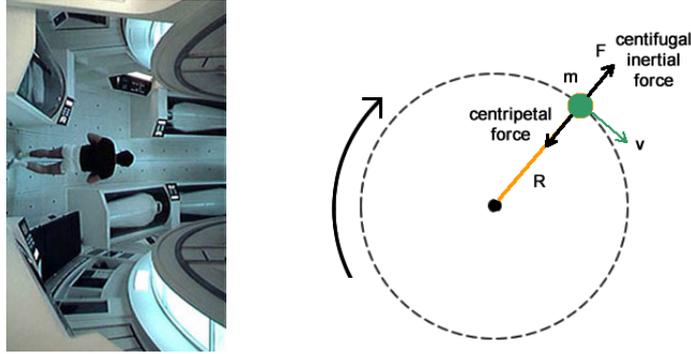


Figura 22: L’anello rotante che crea la gravità artificiale in “2001 Odissea nello Spazio”: fotogramma dal film (a sinistra) e spiegazione (a destra).

neo “andando per la tangente” con accelerazione  $a_c$  se non viene ostacolata da una forza, in questo caso la reazione del pavimento).

## 7.1 Curvatura dei raggi di luce

A causa dell’equivalenza tra massa ed energia, discussa in dettaglio nel Paragrafo 5.2.2, i fotoni, pur privi di massa a riposo  $m$ , sono dotati di energia  $E$ , e possono essere caratterizzati dalla massa equivalente definita dal primo e terzo membro della (73):

$$m_{eq} = \frac{E}{c^2}$$

Pertanto, è lecito pensare che i fotoni siano soggetti ad inerzia e gravitazione come tutte le particelle e, in armonia con tale ipotesi, applicare il Principio di Equivalenza anche ai fotoni e ai raggi di luce. Si consideri, quindi, la Fig. 23 (in alto) nella quale un impulso di luce, in moto rettilineo rispetto al sistema delle stelle fisse, attraversa una navicella spaziale che sta viaggiando in moto uniformemente accelerato caratterizzato, ad esempio, da:  $a = -g$ , (dove  $g$  è la gravità sulla superficie del pianeta di partenza dell’astronave). Nei quattro istanti esaminati il lampo di luce incrocia i quattro punti evidenziati dai segnali luminosi all’interno della navicella. Nella Fig. 23 (posizione in basso a sinistra) si nota come, a causa del moto uniformemente accelerato, l’astronauta all’interno veda l’impulso di luce curvare verso il basso seguendo una traiettoria parabolica. Infine, nella Fig. 23 (posizione in basso a destra) si vede come, in armonia con il Principio di Equivalenza, l’impulso di luce segua la traiettoria parabolica anche nella situazione di navicella ferma e presenza di gravità. La conclusione del ragionamento è che

- i fotoni, ovvero i raggi di luce, si incurvano in presenza di un campo gravitazionale.

Dopo la pubblicazione della Relatività Generale (e in mancanza di astronavi), le conferme di una previsione così rivoluzionaria andavano cercate nelle osservazioni astronomiche. Una prima conferma sotto forma di misura della deflessione, ad opera del Sole, della luce emessa da una stella, arrivò nel 1919. L’effetto di deflessione solare, schematizzato nella Fig. 24 in alto, fu riscontrato da Arthur Eddington (1882-1944) che si recò

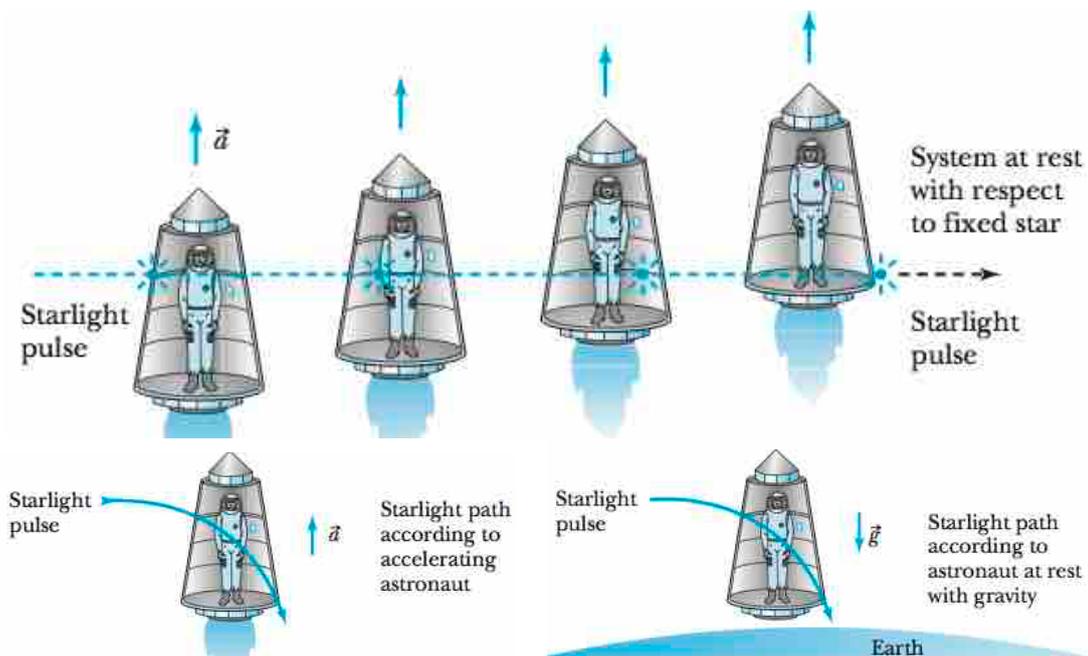


Figura 23: In un sistema di riferimento fisso, un lampo luce segue un percorso rettilineo attraverso una navicella che è in moto uniformemente accelerato con  $a = -g$  (posizione in alto). Traiettoria del lampo di luce all'interno, vista dall'astronauta (posizione in basso a sinistra). Traiettoria del lampo di luce all'interno nella situazione di navicella ferma e presenza di gravità (posizione in basso a destra). [S.T. Thornton e A. Rex, *Modern Physics for Scientists and Engineers-IVth ed.*, Cengage Learning, Boston, 2013.]

appositamente nell'isola di São Tomè e Príncipe (nel Golfo di Guinea al largo dell'Africa centro-occidentale), durante l'eclissi totale di Sole particolarmente ben visibile nell'isola. Le rilevazioni fotografiche di Eddington, tuttavia, non risultarono di grande qualità e, attualmente, non vengono più utilizzate per valutare l'accuratezza delle previsioni relativistiche.

Un'altra conseguenza importante della deflessione della luce è l'effetto di "lente gravitazionale", schematizzato nella Fig. 24 in basso. Nel 1912 Einstein descrisse quest'effetto in appunti che non pubblicò in quanto con la tecnologia dell'epoca "vi erano scarse speranze di osservarlo". (Una descrizione coincisa dell'effetto fu comunque pubblicata da Einstein nel 1936, su sollecitazione di Rudi Mandl, un ingegnere Ceco dai multiformi interessi). La conferma sperimentale dell'esistenza di lenti gravitazionali giunse alla metà degli anni ottanta, non appena furono disponibili telescopi con sufficiente definizione e sensibilità. Oggi sappiamo che le lenti gravitazionali si producono quando radiazioni elettromagnetiche, provenienti da sorgenti lontane particolarmente forti (come i Quasar), incrociano un ammasso di galassie nel percorso verso la Terra. (Sia la deflessione dei raggi di luce, sia le lenti gravitazionali saranno, però, ridiscusse al Paragrafo 8.2 nel contesto, più corretto, della teoria relativistica della gravitazione).

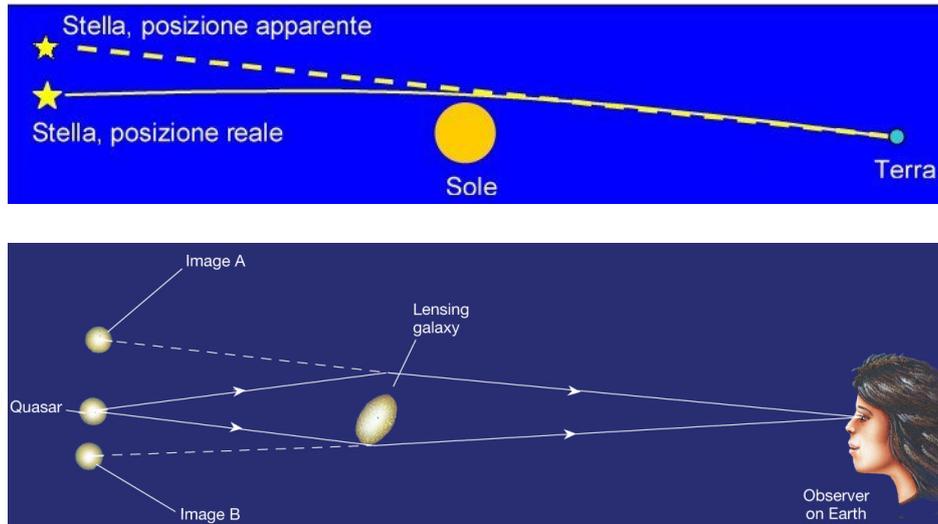


Figura 24: Deflessione della luce da parte del Sole, visibile durante le eclissi (sopra) e lente gravitazionale (sotto).

## 7.2 Spostamento gravitazionale delle frequenze di radiazione\*

Nelle applicazioni del Principio di Equivalenza discusse sinora, il riferimento alla legge della gravitazione di Newton era implicito. In questo paragrafo, invece, il riferimento diventa esplicito al fine di consentire la definizione di un potenziale gravitazionale. Per semplicità, inoltre, nel seguito si considererà unicamente l'attrazione esercitata tra due masse molto diverse: una molto grande  $M$  (ad esempio quella di un pianeta o di una stella), ed una molto piccola  $m$  (ad esempio quella di una particella elementare). In tal caso, la legge di Newton si può scrivere nella forma

$$F = m \frac{GM}{r^2} \quad (74)$$

dove  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  è la costante di gravitazione. L'accelerazione di gravità sulla Terra è definita da

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} \quad (75)$$

e, nelle vicinanze della superficie, vale:  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ .

L'energia potenziale gravitazionale  $U$  di una massa  $m$  è pari al lavoro meccanico necessario per portare la massa dal punto considerato al riferimento nel quale, convenzionalmente, si assume  $U = 0$ . Nelle vicinanze della superficie terrestre vale la (75), e viene naturale porre il riferimento al livello del suolo come in Fig. 25 a sinistra. In tal caso si ha, evidentemente:  $U_B = 0$  in corrispondenza al rilevatore  $B$ , e si ottiene

$$U_A - U_B = U_A = \int_{H_B}^{H_A} F dH = \int_{H_B}^{H_A} mg dH = mgH \quad (76)$$

dove  $H$  è l'altezza a cui si trova l'emettitore  $A$ .

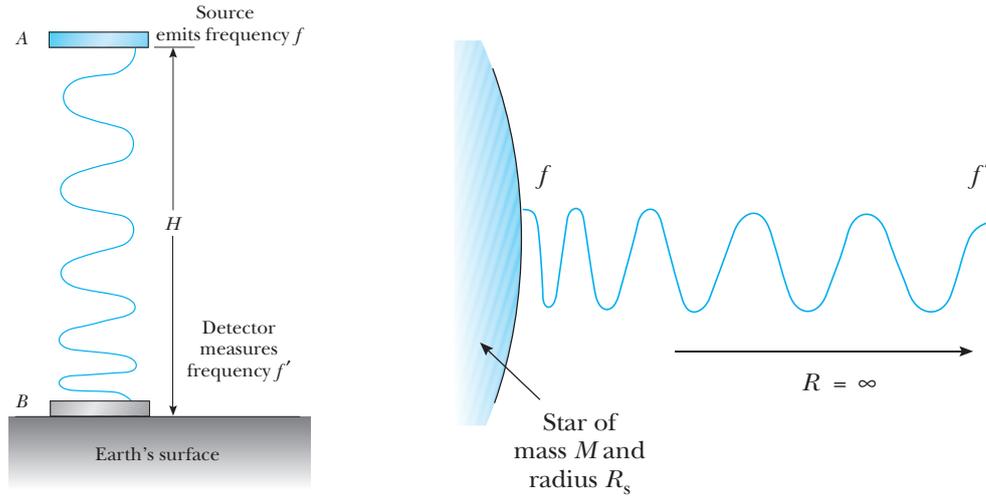


Figura 25: A sinistra: emissione di fotoni verso il basso e conseguente spostamento gravitazionale verso il blu; a destra: emissione di fotoni da una stella gigante e conseguente spostamento gravitazionale verso il rosso.[R.A. Serway, C.J. Moses e C.A. Moyer, *Modern Physics-IIIrd ed.*, Brooks/Cole-Thomson Learning, Australia, 2005]

In questo paragrafo ci si occupa di radiazioni elettromagnetiche e, come si evince dalle figure a corredo, le particelle considerate sono fotoni la cui massa equivalente viene determinata in base alla (73) e alla relazione di Planck (67). Di conseguenza, si ha

$$m = m_{eq} = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2} \quad \Rightarrow \quad U_A = \frac{hf}{c^2} gH \quad (77)$$

A questo punto si può scrivere il bilancio energetico per l'emissione di un fotone in  $A$  ed il successivo assorbimento in  $B$ :

$$K_B + U_B = K_A + U_A \quad \Rightarrow \quad hf' + 0 = hf + \frac{hf}{c^2} gH \quad (78)$$

e ricavare così la relazione cercata

$$\frac{f'}{f} = 1 + \frac{gH}{c^2} > 1 \quad (79)$$

Tale relazione vale per fotoni che scendono, ed ha per risultato un aumento di energia che si traduce in un aumento di frequenza ed una diminuzione di lunghezza d'onda (essendo  $\lambda = c/f$ ). Si usa, quindi, dire che l'emissione verso il basso causa uno spostamento del colore della radiazione emessa verso lunghezze d'onda più piccole, ovvero verso il blu (cioè quello che si usa definire "gravitational blue shift"). Invertendo le posizioni di sorgente ed assorbitore e ripetendo gli sviluppi analitici, si trova una relazione analoga alla (79), solo con il segno cambiato

$$\frac{f'}{f} = 1 - \frac{gH}{c^2} > 1 \quad (80)$$

Si usa, quindi, dire che l'emissione verso l'alto causa uno spostamento del colore della radiazione emessa verso lunghezze d'onda più grandi, ovvero verso il rosso (cioè quello che si usa definire "gravitational red shift").

Con una metodologia analoga è possibile indagare anche su cosa succede alle radiazioni elettromagnetiche che arrivano alla Terra dopo essere state emesse da un corpo celeste (come, ad esempio, una stella ad alta densità). Una situazione di questo tipo è schematizzata in Fig. 25 a destra e, date le distanze in gioco, non può essere investigata utilizzando una gravità  $g = \text{cost}$  ma richiede l'impiego di una energia potenziale che tenga conto dell'andamento della forza di attrazione al variare della distanza radiale. In questo caso, evidentemente, l'energia potenziale  $U(r)$  della massa  $m$  in un punto a distanza  $r$  dal baricentro di  $M$ , è pari al lavoro meccanico necessario per portare  $m$  dal punto considerato al riferimento. Assumendo come riferimento  $U_\infty = 0$  a una distanza infinita dal baricentro, si ha

$$U - U_\infty = - \int_R^\infty m \frac{GM}{r^2} dr = mGM \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = - \left( \frac{mGM}{R} - 0 \right) \quad (81)$$

ovvero

$$U = - \frac{mGM}{R} \quad \Rightarrow \quad U_S = - \frac{mGM}{R_S} \quad (82)$$

in corrispondenza al raggio della stella. Procedendo in analogia al caso precedente, si può scrivere il bilancio energetico per l'emissione di un fotone sulla superficie della stella ed il successivo assorbimento sulla Terra considerata, ai fini pratici, a distanza infinita:

$$(K + U)_{Terra} = (K + U)_{Stella} \quad \Rightarrow \quad hf' - 0 = hf - \frac{GM}{R_S} \frac{hf}{c^2} \quad (83)$$

e ricavare così la relazione cercata

$$\frac{f'}{f} = 1 - \frac{gM}{R_S c^2} < 1 \quad (84)$$

Tale relazione vale per fotoni emessi dalla stella, ed ha per risultato una diminuzione di energia che si traduce in una diminuzione di frequenza ed un aumento di lunghezza d'onda (essendo  $\lambda = c/f$ ). Si usa, quindi, dire che la radiazione emessa da una stella arriva sulla Terra con uno spostamento del colore verso lunghezze d'onda più grandi, ovvero verso il rosso (in Inglese "gravitational red shift").

### 7.2.1 Orologi nel campo gravitazionale

I risultati del paragrafo precedente possono essere letti anche in termini di trascorrere del tempo. Nella situazione della Fig. 25 a sinistra, il generatore di onde elettromagnetiche posto in alto opera con frequenza costante  $f$ , eppure il ricevitore in basso riceve un segnale di frequenza aumentata a  $f'$ . Sarebbe sbagliato pensare che delle frequenze si aggiungono durante la strada. Simmetricamente, il segnale emesso da un generatore in basso arriva in alto con frequenza diminuita e, in questo caso, sarebbe ugualmente sbagliato pensare che delle frequenze si perdono per la strada. Pertanto, l'unica soluzione possibile è ammettere che il tempo in alto, dove il campo gravitazionale è più debole, scorra più velocemente del tempo in basso dove il campo gravitazionale è più forte, ovvero

- gli orologi vanno tanto più in fretta quanto minore è il campo gravitazionale o, se si vuole, vanno più adagio quanto maggiore è il campo gravitazionale

Per lo stesso motivo, nelle immediate vicinanze di una stella, cioè vicino a una massa che esercita un'enorme attrazione gravitazionale, gli orologi vanno più adagio rispetto a dove il campo gravitazionale è più debole cioè, ad esempio, sulla Terra.

Nel campo di gravitazione della Terra, tuttavia, gli effetti relativistici della gravitazione sullo scorrere del tempo sono così piccoli che possono essere rilevati solo con l'uso di orologi atomici. D'altro canto, il progresso tecnologico consente, e consentirà ancora di più in futuro, di avere a disposizione orologi atomici di dimensioni sempre più piccole e accuratezza sempre più grande e, di conseguenza, l'uso di orologi atomici come sensori di campo gravitazionale appare sempre meno fantascientifico.

### 7.2.2 I “buchi neri”

Dal paragrafo precedente si può riprendere la relazione (84) scrivendola in forma di uguaglianza

$$\frac{f'}{f} = 1 - \frac{gM}{R_S c^2} \quad (85)$$

In base alla (85) se, alla fine del suo ciclo di vita una stella gigante diventa molto densa (ovvero concentra tutta la sua massa  $M$  in un raggio  $R_S$  molto piccolo), può succedere che si abbia

$$\frac{gM}{R_S c^2} \geq 1 \quad (86)$$

In tal caso si dice che il raggio  $R_S$  ha assunto un valore minore o uguale del raggio critico  $R_C$  al quale la frequenza  $f'$  si annulla. In pratica, con

$$R_S \leq R_C = \frac{gM}{c^2} \quad (87)$$

nessun fotone riesce più ad uscire e, di conseguenza, la stella diventa un “buco nero” in quanto non emette radiazioni e, a motivo dell'attrazione gravitazionale molto intensa esercitata sullo spazio esterno, assorbe tutta la materia e tutte le radiazioni nelle vicinanze. (Infatti, i buchi neri possono essere localizzati soltanto attraverso manifestazioni gravitazionali).

Si tratta, comunque, di situazioni ben strane al punto che lo stesso Einstein, nel 1939, si chiese “se non ci fosse una legge della Natura che impedisce ad una stella di comportarsi in maniera così assurda”. Ad eliminare i dubbi di questo tipo fu il futuro *padre* della prima bomba atomica Robert Oppenheimer (1904-1967) quando, nello stesso 1939, dimostrò inequivocabilmente che un buco nero poteva generarsi per *implosione* della materia di cui era fatta una stella se, al diminuire delle dimensioni, la gravità diventava tanto forte da superare le forze nucleari negli atomi così compattati. In ogni caso, le trasformazioni in buchi neri hanno luogo in condizioni veramente estreme dal momento che il raggio critico è pari a 3 km circa per il Sole e meno di 1 cm per la Terra.

## 8 Teoria relativistica della gravitazione

In premessa, va rilevato che la teoria di Newton è sorprendentemente accurata nella maggior parte delle situazioni pratiche. (Per questo motivo, nella vita di tutti i giorni si continua ad usare la “forza di gravità” e, nel contesto del Principio di Equivalenza, si è potuto fare riferimento alla legge di Newton). Infatti, le motivazioni che hanno spinto Einstein a formulare una nuova teoria della gravitazione non sono state di tipo pratico ma filosofico, in quanto la teoria della gravitazione universale di Newton:

- richiede che l’attrazione gravitazionale venga trasmessa istantaneamente a distanza con modalità che lo stesso Newton nemmeno tentò di ipotizzare (limitandosi a pronunciare la celebre frase “hypotheses non fingo”),
- a sua volta, la trasmissione istantanea a distanza è incompatibile con il limite massimo  $c$  previsto dalla relatività speciale per la velocità di un qualsivoglia segnale.

Dopo la decisione iniziale, maturata già nel 1905, nemmeno per Einstein fu facile formulare una nuova teoria della gravitazione. L’esperienza mentale sull’osservatore in caduta libera, che permise di arrivare al Principio di Equivalenza, giunse solo nel 1907 e, successivamente, furono necessari ben otto anni per arrivare a quelle che oggi sono note col nome di “equazioni di campo di Einstein”. Tali equazioni si ispirano alla teoria dell’elettromagnetismo di Maxwell in quanto Einstein ipotizzò, fin dall’inizio, l’esistenza di un campo gravitazionale che si propaga alla velocità della luce  $c$  e che induce un’attrazione la più vicina possibile a quella risultante dalla legge di gravitazione universale di Newton.

Il passo successivo fu la ricerca delle relazioni che intercorrono tra la curvatura dello spaziotempo e la distribuzione dinamica della materia (che per brevità, da qui in poi pensiamo “equivalente”, cioè comprensiva anche dell’energia) presente nello spaziotempo stesso. La presenza della materia/energia, causa una curvatura dello spaziotempo, che trasforma le traiettorie inerziali dei corpi in geodetiche, ovvero nelle curve più brevi per congiungere due punti. (Il termine “geodetica” deriva da geodesia, la scienza della misurazione delle dimensioni e della forma del globo terrestre. Nel suo significato originale, una geodetica è il cammino più breve tra due punti sulla superficie della Terra, ossia un arco di cerchio massimo che rappresenta, ad esempio, la distanza più breve, in linea d’aria o d’acqua, tra due aeroporti o due porti).

In altre parole, la materia/energia incurva lo spaziotempo a quattro dimensioni (tre spaziali ed una temporale) dando origine alla gravità interpretata come costrizione dei corpi a muoversi seguendo i “binari geodetici” nello spaziotempo così incurvato. Di qui il celebre aforisma del fisico teorico americano John Wheeler (1911-2008)

- lo spaziotempo dice alla materia/energia come muoversi e la materia/energia dice allo spaziotempo come incurvarsi.

In armonia con l’aforisma di Wheeler le equazioni di campo di Einstein possono, quindi, essere scritte nella forma simbolica

$$\text{GEOMETRIA} \Leftrightarrow \text{MATERIA/ENERGIA} \quad (88)$$

che, per quanto possibile a un livello elementare come questo, sarà esplicitata nel prossimo paragrafo

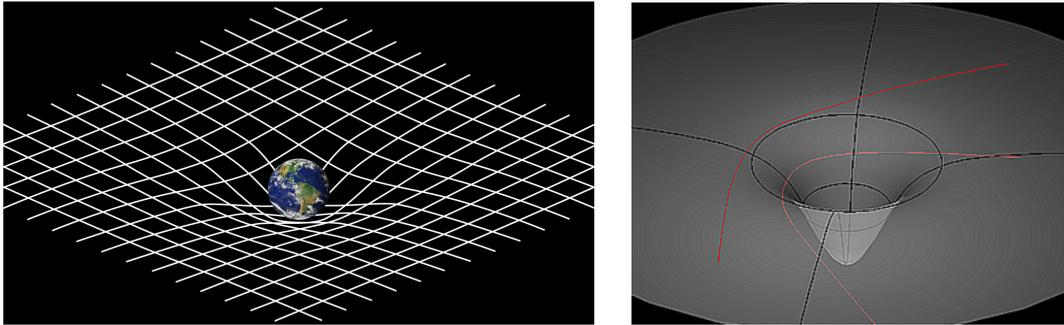


Figura 26: La massa di un pianeta incurva lo spaziotempo (a sinistra) [NASA] e nello spaziotempo risultante sono geodetiche le traiettorie di caduta, le orbite dei satelliti e i percorsi seguiti dai raggi di luce deviati dalla massa planetaria (a destra) [Wikipedia, *Geodetica*].

## 8.1 Le equazioni di campo di Einstein\*

Le equazioni di campo di Einstein, risultato degli otto anni di duro lavoro prima ricordati, possono essere espresse nella forma sorprendentemente sintetica

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (89)$$

dove  $G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein che descrive la curvatura dello spaziotempo,  $T_{\mu\nu}$  è il tensore materia/energia-quantità di moto che descrive le proprietà dinamiche della materia/energia,  $G$  (da non confondere con  $G_{\mu\nu}$ ) è la costante gravitazionale di Newton, e  $c$  è la velocità della luce (che talvolta, cambiando unità e misurando ad esempio lo spazio in anni-luce e il tempo in anni, viene sottintesa in quanto uguale ad 1). Nel suo complesso, quindi, la (89) mette in relazione la curvatura dello spaziotempo con l'azione della materia/energia.

A sua volta, nella (89) il tensore di Einstein è definito come

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (90)$$

dove  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico,  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di curvatura di Ricci, funzione differenziale non lineare del tensore metrico

$$R_{\mu\nu} = f(g_{\mu\nu}) \quad (91)$$

e  $R$  è una funzione scalare definita punto per punto. (In matematica, la “metrica” serve a calcolare le distanze e, nel contesto relativistico, permette il calcolo delle distanze tra due punti qualunque dello spaziotempo).

Rinunciando ad accuratezza e rigore, si può dire che i tensori  $G_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$  e  $T_{\mu\nu}$  sono assimilabili a matrici (o se si vuole a tabelle) quadrate di quattro righe per quattro colonne (tante quante le quattro coordinate dello spaziotempo: tre spaziali ed una temporale). I sedici elementi di ogni tabella sono contraddistinti dalla posizione occupata (riga  $\mu$ , colonna  $\nu$ ), e la scrittura (89) indica che l'elemento  $G_{\mu\nu}$ , costituito da una espressione analitica differenziale nonlineare legata al tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , è calcolabile come

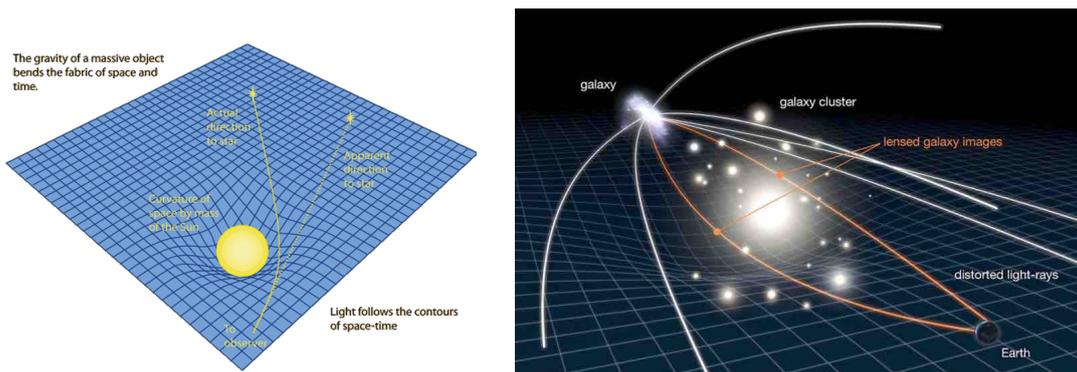


Figura 27: Deflessione della luce da parte del Sole, visibile durante le eclissi (sinistra) [HyperPhysics, Georgia State University] e lente gravitazionale (destra) [NASA] rappresentate nel contesto dello spaziotempo curvo.

prodotto del coefficiente  $8\pi G/c^4$  per l'elemento corrispondente  $T_{\mu\nu}$ . Di conseguenza, la (89) è una rappresentazione sintetica di un insieme di sedici equazioni differenziali non lineari che, tuttavia, grazie alle simmetrie esistenti, può essere ridotto ad un sistema di “appena” dieci equazioni, sempre molto difficile da risolvere in mancanza di forti ipotesi semplificative.

In conseguenza a quanto visto, si può dire che risolvere le equazioni di campo (89) significa determinare  $g_{\mu\nu}$  e, quindi, avere tutte le “informazioni” che permettono di calcolare le distanze tra due punti qualunque dello spaziotempo e, in questo modo, avere la possibilità di determinare la curva di lunghezza minima, ovvero la “geodetica” che congiunge i due punti.

## 8.2 La curvatura dello spaziotempo

Per i non-matematici (e forse anche per i matematici) è impossibile visualizzare uno spaziotempo a quattro dimensioni: l'unico modo, infatti, è quello di rappresentare le traiettorie geodetiche seguite, nel tempo, in uno spazio tridimensionale, o le situazioni “istantanee” che si presentano in uno spazio tridimensionale a seguito di particolari eventi.

In questo paragrafo ci si interessa di traiettorie e, graficamente, ciò significa ricorrere a rappresentazione analoghe a quelle riportate nella Fig. 26. Con tale ausilio si può vedere come, nel campo gravitazionale generato dal pianeta nella Fig. 26 (a sinistra), si abbiano tre tipi fondamentali di geodetica, illustrati in dettaglio nella Fig. 26 (a destra). Un primo tipo descrive le traiettorie dei corpi che cadono verticalmente verso il pianeta; un secondo tipo descrive le orbite circolari dei satelliti e il terzo tipo descrive il percorso seguito dai raggi di luce deviati dalla presenza della massa planetaria.

Nel contesto in cui ci si pone, può essere interessante anche riproporre nella Fig. 27 le rappresentazioni corrette dei due esempi di deviazione dei raggi di luce ad opera delle masse già illustrati nel Paragrafo 7.1. Infatti, se la gravità non è più una forza, occorre individuare i percorsi geodetici seguiti dai fotoni in coerenza con la nuova teoria. Il risul-

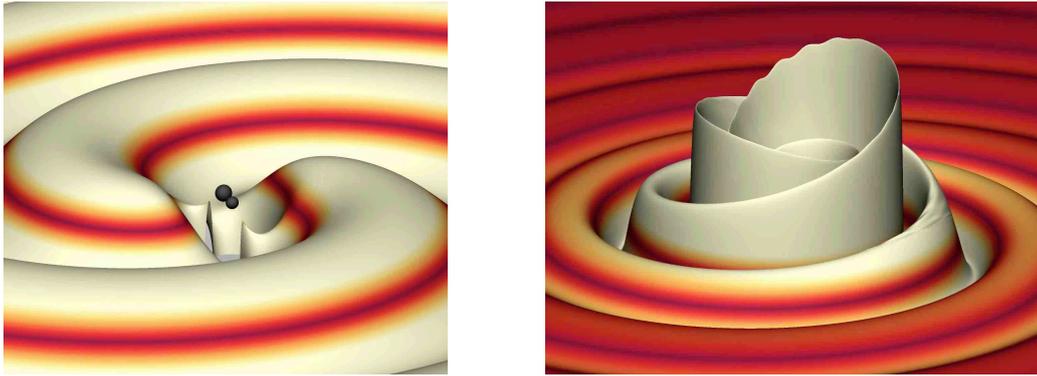


Figura 28: Simulazione digitale di onde gravitazionali generate dalla fusione di due buchi neri: l'istantanea a sinistra è relativa alla fase di avvicinamento, mentre quella a destra riguarda la fusione vera e propria [Max Planck Institute for Gravitational Physics].

tato è quello rappresentato nella Fig. 27 dove, a sinistra, si vede la traiettoria seguita da un raggio di luce nelle vicinanze del Sole e, a destra, si vede la corretta rappresentazione di una lente gravitazionale nello spaziotempo curvo. Chiaramente, i percorsi si sono allungati rispetto a quelli della Fig. 24, dove si faceva implicito riferimento alla attrazione gravitazionale Newtoniana e non si considerava la curvatura dello spaziotempo.

### 8.3 Le onde gravitazionali

Le equazioni della relatività generale ammettono soluzioni ondulatorie ed, infatti, l'esistenza di onde gravitazionali è stata prevista esplicitamente da Einstein nel 1916 in un articolo parzialmente corretto nel lavoro definitivo: "Le onde gravitazionali" pubblicato nel 1918. Tali onde, una volta diagrammate, hanno forma simile alle onde d'acqua ma si propagano nello spaziotempo alla velocità della luce in modo analogo alle radiazioni luminose e, di conseguenza, costituiscono una radiazione gravitazionale vera e propria. Se poi le oscillazioni dello spaziotempo sono generate da movimenti rapidi di grandi masse celesti, le onde risultanti possono avere intensità tali da dare luogo ad effetti rilevabili anche a distanze, è il caso di dirlo, astronomiche. Le onde più forti sono prodotte da eventi quali la fusione di due "nane bianche" e soprattutto la fusione di due "buchi neri". (Le nane bianche sono stelle molto dense in quanto formate dai residui neutronici dei processi di fusione nucleare all'interno di stelle a massa confrontabile con quella del Sole. I buchi neri, invece, sono quei particolari "oggetti celesti" descritti nel Paragrafo 7.2.2). Una ricostruzione digitale della fusione di due buchi neri è illustrata nelle "istantanee" di Fig. 28.

Come si intuisce anche da semplici rappresentazioni di questo tipo, gli effetti di contrazione ed espansione periodica dello spazio generati da tali eventi sono catastrofici nelle vicinanze ma, fortunatamente, giungono sulla Terra attenuati al punto da risultare estremamente difficili da rilevare. (La potenza specifica, ovvero per unità di superficie, di un evento che si propaga nello spazio è inversamente proporzionale alla superficie della sfera su cui si trova il punto in esame e, quindi, si riduce con il quadrato della distanza).

La prima osservazione diretta di onde gravitazionali ha avuto luogo il 14 settembre 2015 da parte di due gruppi di ricerca: lo statunitense LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) e l'italiano VIRGO (così chiamato dall'ammasso stellare della costellazione della Vergine che il gruppo osservava). L'evento cui ci si è riferiti in quella occasione ha riguardato la fusione di due buchi neri, uno grande 36 volte il Sole e l'altro 29. Un miliardo e trecento milioni di anni fa, i due buchi neri hanno iniziato ad avvicinarsi sempre di più, fino a fondersi creando un unico buco nero grande 62 volte il Sole (avendo perso la massa equivalente a 3 volte il Sole associata all'energia liberata dalla fusione). L'energia sprigionata dalla fusione (confrontabile con quella di una, per fortuna teorica, "bomba H" o, più propriamente, a fusione termonucleare incontrollata di massa uguale a 3 volte il Sole) è stata enorme, e la potenza emessa nel corso dell'evento, durato pochi decimi di secondo, ha superato di gran lunga quella emessa da tutte le stelle dell'universo messe insieme. Subito dopo la fusione, lo spaziotempo che avvolgeva il nuovo buco nero è tornato tranquillo, ma le onde generate sono risultate di intensità tale da venir rilevate sulla Terra un miliardo e trecento milioni di anni dopo (e, quindi, a un miliardo e trecento milioni di anni luce di distanza).

Non è superfluo ricordare che, per tale successo, Rainer Wess, Kip Thorne e Barry Barish (gli iniziatori, oltre 40 anni fa, del progetto LIGO negli Stati Uniti) sono stati premiati con il Nobel per la Fisica assegnato il 3 ottobre 2017, con la motivazione: "per contributi decisivi alla rivelazione e all'osservazione delle onde gravitazionali". Era passato, praticamente, un secolo dalle previsioni di Einstein!

## 8.4 Accuratezza della teoria relativistica della gravitazione

La previsione dell'esistenza di onde gravitazionali è solo il più recente successo della teoria relativistica della gravitazione (anche se è ancora troppo presto per procedere, in questo settore, a confronti quantitativi tra previsioni teoriche e riscontri sperimentali). Comunque, i confronti quantitativi per altre situazioni non mancano e, con il miglioramento delle tecniche di osservazione, tendono a dare risultati sempre più vicini a quelli ottenuti con la teoria relativistica.

Tornando al 1915, vale la pena di ricordare quello che fu, forse, il primo eclatante successo della Relatività Generale: la stima corretta della precessione (ovvero avanzamento) del perielio di Mercurio. (Il perielio è il punto dell'orbita nel quale un pianeta è più vicino al Sole). Nella sua orbita intorno al Sole, Mercurio non segue ogni anno lo stesso percorso, e il perielio avanza di un angolo piccolo ma ancora misurabile. Nella Fig. 29, infatti, l'avanzamento dell'orbita è fortemente amplificato per facilitare la comprensione del processo. Le previsioni classiche tenevano conto della presenza degli altri pianeti del sistema solare ma ovviamente, non della curvatura dello spaziotempo e, di conseguenza, sottostimavano l'avanzamento del perielio di circa 43 secondi di arco per secolo. (La circonferenza è divisa in 360 gradi, ogni grado ha 60 minuti, ogni minuto ha 60 secondi, e 43 secondi... corrispondono, grosso modo, al diametro apparente di una giostra per bambini vista da 30 chilometri di distanza). La svolta si ebbe quando Einstein applicò la versione definitiva della teoria relativistica della gravitazione al calcolo dell'orbita di Mercurio recuperando i 43 secondi d'arco mancanti.

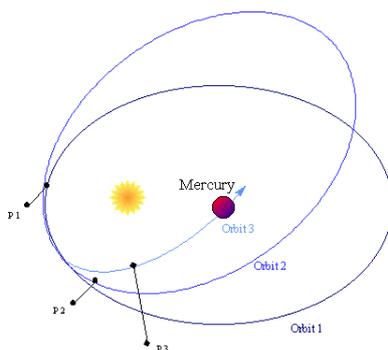


Figura 29: Precessione (amplificata) del perielio di mercurio. [Cornell University]

Per quanto riguarda invece la stima della deflessione della luce da parte del Sole, la prima previsione teorica è dovuta all'astronomo tedesco Johann Georg von Soldner e risale al 1801. I calcoli di Soldner erano basati sulla legge di gravitazione universale di Newton e sul modello corpuscolare della luce proposto dallo stesso Newton. Ciò significa che, "a sua insaputa" come si dice oggi, Soldner aveva utilizzato il Principio di Equivalenza ed, infatti, la procedura da lui seguita non si discosta da quella illustrata nel Paragrafo 7.1. In questo modo Soldner calcolò una deflessione di 0,9 secondi di arco. La teoria relativistica della gravitazione consentì di tener conto anche degli effetti di curvatura dello spaziotempo, e la stima di Einstein fu una deflessione di 1,75 secondi di grado con una correzione di 85 centesimi di arco (pari al diametro apparente di un CD a 30 chilometri di distanza), che è in ottimo accordo con le osservazioni astronomiche attuali.

Risultati di accuratezza simile si ottengono anche applicando la teoria relativistica della gravitazione alla stima degli effetti di lente gravitazionale che, come si è osservato, sono stati oggetto di misure sperimentali solo a partire dalla metà degli anni ottanta, quando furono disponibili telescopi con sufficiente definizione e sensibilità. Tali effetti, tra l'altro, sono una delle poche manifestazioni della "materia scura" (ovvero della materia che non è direttamente osservabile, in quanto, diversamente dalla materia conosciuta, non emette radiazioni elettromagnetiche e si manifesta unicamente attraverso gli effetti gravitazionali).

Infine, per quanto riguarda lo spostamento gravitazionale delle frequenze di radiazione (rivisitato alla luce della teoria relativistica della gravitazione per tener conto, ad esempio, della non perfetta sfericità della Terra), la conferma più attendibile, a tutt'oggi, è stata ottenuta nel 1976 utilizzando un razzo in volo sub-orbitale a 10.000 chilometri di altezza. La frequenza di un orologio atomico a bordo del razzo è stata confrontata con quella di un orologio simile posto al suolo. Dopo le necessarie correzioni per tener conto della velocità del razzo, si è riscontrato uno spostamento gravitazionale verso il rosso dei segnali radio emessi a terra che è risultato in accordo, entro lo 0,02%, con quello previsto dalla teoria gravitazionale di Einstein.

Dall'insieme delle considerazioni sopra esposte, emerge chiaramente che la teoria relativistica della gravitazione è molto accurata ed affidabile, tant'è vero che cosmologi e fisici delle particelle l'hanno considerata, fin da subito, uno strumento di lavoro da uti-

lizzare abitualmente. Non altrettanto si può dire degli ingegneri che, tradizionalmente, la consideravano troppo complessa per l'uso quotidiano. La situazione, tuttavia, sta rapidamente cambiando, almeno per quel che riguarda la tecnologia GPS (Global Positioning System), e le sue sempre più numerose applicazioni in molti settori dell'ingegneria (quali la navigazione aerea, marittima e terrestre), e dell'industria del tempo libero (soprattutto in connessione con gli "smart phones").

Per determinare la sua posizione un ricevitore GPS utilizza il tempo, misurato dall'orologio atomico a bordo del satellite che emette un segnale. Attesa la costanza della velocità della luce, questa informazione è sufficiente a calcolare la distanza tra ricevitore e satellite. Di conseguenza "triangolando" su più satelliti è possibile calcolare anche la posizione, spaziale e temporale, del ricevitore. Attualmente la precisione delle localizzazioni è dell'ordine dei 15 metri e richiede una sincronizzazione degli orologi del sistema GPS entro i 50 nanosecondi (tempo in cui la luce percorre i 15 metri). Ovviamente, la proporzione è presto fatta per le applicazioni del futuro sulle auto a guida autonoma: sarà necessaria un'accuratezza 1000 volte migliore e, quindi, una sincronizzazione degli orologi entro i 50 picosecondi ( $50 \cdot 10^{-12}$  s), tempo in cui la luce percorre 15 centimetri, distanza di sicurezza minima. Evidentemente, con esigenze, di questo tipo, è necessario applicare la teoria più accurata a disposizione per le correzioni che si devono apportare agli intervalli di tempo misurati. Come si evince da quanto detto in precedenza, tali correzioni sono dovute sia al movimento relativo satellite-ricevitore, sia allo spostamento gravitazionale delle frequenze emesse dai satelliti in orbita a circa 20.000 chilometri dalla Terra (considerata nella sua configurazione geometrica effettiva).

## 9 Dalla relatività alla cosmologia moderna

L'enorme sforzo necessario a formulare la teoria della Relatività Generale, le difficoltà create dalla guerra, e i problemi connessi alla rottura del matrimonio avevano reso alquanto precarie le condizioni di salute di Einstein. (Per la cronaca "rosa": già nel 1914 la moglie Mileva Maric lo aveva abbandonato a Berlino tornando con i due figli a Zurigo, probabilmente perché sospettava una relazione sentimentale del marito con la cugina Elsa Lowenthal. Nel 1916 le, già di per sé, non brillanti condizioni generali di salute di Einstein, erano decisamente peggiorate a causa dell'alimentazione da "single in tempo di guerra" e dell'irregolarità dei pasti che l'impegno totalizzante per la formulazione della relatività generale comportava).

Nel 1917, Einstein ebbe un vero e proprio "collasso psicofisico": per diversi mesi non riuscì quasi ad uscire di casa, tormentato com'era da atroci dolori di stomaco che, praticamente, gli impedivano di mangiare e che lui aveva autodiagnosticato come "cancro". Fortunatamente, la genialità non è quasi mai universale, e i medici diagnosticarono un'ulcera che venne lentamente "curata" dalla stessa Elsa, dopo che Albert si era trasferito in un appartamento contiguo a quello di lei. La cura fu un'alimentazione sana e regolare accompagnata dall'imposizione di un regime di vita relativamente meno forsennato, ma non dall'esercizio fisico che nessuno dei due amava. (Per gli amanti del lieto fine: Albert sposò Elsa nel 1919 dopo, dicono, sette anni di "legame", non appena furono trascorsi i cinque anni di separazione da Mileva, previsti dalla legge dell'epoca).

Nonostante le difficoltà esterne Einstein, che possedeva una leggendaria capacità di concentrazione (e, forse per questo, un'altrettanto leggendaria capacità di distrazione), pubblicò nel 1917 diversi articoli seminali, tra cui:

- “Considerazioni cosmologiche sulla teoria della Relatività Generale”

nel quale applicò all'intero universo le equazioni di campo della teoria della Relatività Generale. Fino a quel momento la cosmologia si era limitata alle osservazioni astronomiche e, di conseguenza, le “Considerazioni” di Einstein segnano la nascita della cosmologia moderna che, dal 1917, procederà in parallelo tra teoria ed osservazioni.

## 9.1 Estensione all'universo delle equazioni di campo

Per poter applicare all'intero universo le equazioni di campo della Relatività Generale, Einstein formulò quello che più tardi venne definito “Principio Cosmologico”:

- almeno sui grandissimi spazi l'universo può essere considerato omogeneo ed isotropo e, di conseguenza, la materia in esso presente può essere considerata uniformemente distribuita.

Oltre a semplificare le equazioni, il Principio Cosmologico era in perfetta sintonia con lo “spirito” della relatività, che non ammetteva l'esistenza di osservatori e, quindi, di punti di vista non perfettamente equivalenti.

Tuttavia, quando Einstein applicò all'intero universo le equazioni di campo ottenne un risultato inatteso: l'universo non poteva rimanere statico, ma doveva espandersi o contrarsi. La gravità, infatti, tendeva ad esercitare un'azione attrattiva su tutta la materia e, di conseguenza, a rallentare se non ad invertire ogni eventuale espansione. Poiché l'astronomia, con i telescopi dell'epoca, “vedeva” un universo finito (praticamente limitato alla sola Via Lattea) e pressoché statico (in quanto anche le stelle più lontane, si muovevano a velocità molto basse), non si poteva pensare a un'espansione che, sia pur rallentata, proseguisse all'infinito, ma si doveva pensare a una contrazione. Per avere un universo finito e stabile, quindi, l'unica via che all'epoca sembrava percorribile era quella di modificare le equazioni di campo introducendo un termine che, attraverso una “costante cosmologica”  $\Lambda$ , contrastasse l'azione attrattiva della gravità.

Le equazioni di campo così modificate possono essere scritte nella forma simbolica

$$\text{GEOMETRIA} + \Lambda \Leftrightarrow \text{MATERIA/ENERGIA} \quad (92)$$

che, per quanto possibile a un livello elementare come questo, sarà esplicitata nel prossimo paragrafo.

A conclusione di questo paragrafo si può, comunque, osservare che, secondo Einstein nel 1917:

- “[la costante cosmologica aveva] solo scopo di consentire una distribuzione quasi-statica di materia/energia compatibile con la bassa velocità delle stelle”

Einstein, comunque, tornò sui suoi passi in una seduta dell'Accademia Tedesca delle Scienze svoltasi nel 1931, quando definì “un errore” la costante cosmologica. La causa fu la scoperta di Edwin Hubble (1889-1953) che, nel 1930, enunciò la sua famosa legge: l'universo osservato (che già a quel tempo, grazie al miglioramento dei telescopi, comprendeva una moltitudine di galassie e non la sola Via Lattea) era in espansione e le stelle si allontanavano, una dall'altra, con velocità proporzionale alla distanza. Pertanto le stelle lontane si muovevano a velocità molto elevate, confrontabili con quella della luce, e si poteva di nuovo prendere in considerazione, tra le diverse ipotesi, anche un'espansione dell'universo che, sia pur rallentata dalla gravità, proseguisse all'infinito.

In realtà i geni commettono solo errori “fortunati”, e la costante cosmologica è tornata recentemente in auge come spiegazione più semplice del fatto che l'espansione dell'universo non solo non sta rallentando ma sta accelerando. (Il Premio Nobel per la Fisica nel 2011 è stato assegnato a Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Reiss “Per la scoperta dell'espansione accelerata dell'Universo a partire dall'osservazione di supernove lontane”).

## 9.2 Le equazioni cosmologiche di Einstein\*

Le equazioni di campo di Einstein, modificate per tener conto della costante cosmologica, possono essere convenientemente espresse nella forma sintetica, che corrisponde alla (92)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (93)$$

Successivamente, tenendo conto della definizione (90), si arriva subito alla forma più espansa

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (94)$$

dove si vede chiaramente come la costante cosmologica riduca lo scalare di curvatura, attenuando l'effetto gravitazionale complessivo.

Nell'interpretazione moderna, tuttavia, si preferisce spostare la costante cosmologica al secondo membro, in modo da modificare il tensore materia/energia-quantità di moto

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu}) \quad (95)$$

A questo punto gli sviluppi analitici si fanno semplici ma le spiegazioni diventano complesse. Al solito, rinunciando ad accuratezza e rigore, si può dire che il termine al secondo membro contenente la costante cosmologica è interpretabile come “pressione negativa esercitata dal vuoto”

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (96)$$

e sfruttare la relazione esistente tra pressione e densità di energia del vuoto

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \quad (97)$$

per determinare la densità di energia del vuoto

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (98)$$

Pertanto, attese le considerazioni precedenti, le equazioni di campo modificate possono essere scritte anche nella forma simbolica

$$\text{GEOMETRIA} \Leftrightarrow \text{ENERGIA NORMALE} + \text{ENERGIA VUOTO} \quad (99)$$

dove, sia per motivi tipografici sia per privilegiare il punto di vista energetico, si parla solo di energia senza includere esplicitamente la materia.

A conclusione, può essere interessante notare che, nell'interpretazione corrente, l'energia del vuoto è identificabile con la "energia scura", ma l'approfondimento di questo tema ci porterebbe troppo lontano e, comunque, troppo oltre lo scopo che ci si pone.

## 10 Dopo la relatività

Nel 1917, al culmine degli studi relativistici, Einstein pubblicò anche l'articolo

- "Teoria quantistica dell'irraggiamento"

che è il suo più grande contributo alla teoria quantistica. In esso teorizzò che gli atomi, oltre a emettere spontaneamente radiazioni, possono essere stimolati a farlo. In particolare, un mezzo ottico formato da una nube gassosa di atomi della stessa specie può assorbire l'energia fornita attraverso impulsi elettrici o luminosi e, in conseguenza, emettere fotoni coerenti (ovvero con la stessa direzione ed intensità). Questo processo di emissione stimolata fu la base, negli anni '60, per la realizzazione del LASER (un acronimo per Light Amplification by the Stimulated Emission of Radiation, cioè Amplificazione della Luce attraverso l'Emissione Stimolata di Radiazioni). Attualmente nei laser si impiegano, come mezzi ottici, anche liquidi e cristalli, oltre ai gas, ma la teoria del processo di emissione non è cambiata.

L'ultimo grande contributo di Einstein alla teoria quantistica furono i due articoli

- Teoria quantistica dei gas monoatomici - Parte I e Parte II

apparsi, rispettivamente, nel 1924 e nel 1925 a seguito di un lavoro del fisico indiano Satyendra Nath Bose (1894-1974). Nel 1924, Bose applicò alle radiazioni luminose un metodo statistico originale basato sulla descrizione della luce come un gas di fotoni indistinguibili uno dall'altro. Quando l'articolo con la descrizione del suo modello fu rifiutato da diverse riviste, Bose non si scoraggiò e lo inviò direttamente a Einstein. Einstein riconobbe la genialità del contributo, tradusse personalmente l'articolo in Tedesco e lo fece pubblicare sulla prestigiosa *Zeitschrift für Physik*. Di più, Einstein notò che la statistica di Bose poteva essere estesa anche ai gas e scrisse i due lavori prima citati. Inoltre, prendendo in considerazione un gas di particelle quantistiche prevede la comparsa, a temperature prossime allo zero assoluto, di un nuovo stato della materia: il "condensato", successivamente chiamato di Bose-Einstein. (Il condensato è una specie di liquido nel quale le molecole non si attraggono reciprocamente. Per le sue proprietà estreme, il condensato trova applicazioni nello sviluppo di nuovi dispositivi optoelettronici, come laser ad alta efficienza energetica e interruttori ottici ultraveloci per i futuri sistemi di calcolo). Il primo condensato fu prodotto solo nel 1995 da Eric Cornell e Carl Wieman nel laboratorio

NIST-JILA dell'Università del Colorado, usando un gas di rubidio. Per questo risultato, Cornell e Wieman, assieme a Wolfgang Ketterle, hanno vinto il Premio Nobel per la fisica nel 2001.

Negli stessi anni dei suoi contributi storici alla teoria quantistica, Einstein cominciò a distaccarsi dalla teoria stessa in quanto non riusciva ad ammettere che gli eventi potessero aver luogo per caso, nemmeno a livello atomico; di qui la sua famosa frase, più volte ripetuta: “Dio non gioca a dadi”. Come Spinoza, infatti, anche Einstein, pur non credendo in un Dio personale che interagisse con gli uomini, era assolutamente convinto vi fosse un progetto divino riflesso nelle leggi eleganti che governavano l'universo. (Per riportare il discorso al livello elementare che ci è proprio, a questo punto si può citare Niels Bohr, il “filosofo” della meccanica quantistica che una volta, persa la pazienza, pare abbia risposto a Einstein: “Smettila di dire a Dio cosa deve fare”).

Nel 1925 Einstein aveva 46 anni e, come spesso accade ai grandi geni della fisica e della matematica, la sua creatività era appassita. Egli rimpiangeva di essere diventato una “autorità” dopo avere rivoluzionato la fisica proprio combattendo i difensori ad oltranza dell'autorità Newtoniana ma, ugualmente, spese gli ultimi 30 anni della sua vita criticando la meccanica quantistica e cercando invano una teoria unificata dell'elettromagnetismo e della gravitazione.

Fortunatamente, sul piano umano, Einstein conservò un grande rispetto per la libertà di pensiero e di parola che lo spinsero a rifiutare tutte le forme di oppressione ed a proporre costantemente la tolleranza come condizione necessaria per lo sviluppo di una società creativa. Utilizzò, infatti, l'enorme popolarità e l'immenso prestigio di cui godeva per battersi contro le dittature, l'antisemitismo, il razzismo, la guerra e la minaccia nucleare, trasformandosi in una vera e propria guida spirituale per buona parte dell'umanità.

## Bibliografia

**N. Ashby**, *Relativistic effects in the Global Positioning System*, University of Colorado, 2006.

**A. Beiser**, *Concepts of Modern Physics-VIth ed.*, McGraw-Hill, Boston, 2003.

**P. Benvenuti**, *Origine ed evoluzione dell'universo: cosa può o non può dire la scienza*, Prolusione, Università degli Studi di Padova, 2016.

**P. Coles e F. Lucchin**, *Cosmology: the Origin and Evolution of Cosmic Structure-II ed.*, Wiley, Chichester, Inghilterra, 2002.

**G. Comini e G. Cortella**, *Fondamenti di Trasmissione del Calore-IV ed.*, SGEEditoriali, Padova, 2013.

**A. De Angelis e M.J. Martins Pimenta**, *Introduction to Particle and Astroparticle Physics. Questions to the Universe*, Springer-Verlag, Milano, 2015.

- A. Einstein**, *Elettrodinamica dei corpi in movimento*, Annalen der Physik, 17, 891 (1905).
- A. Einstein**, *L'inerzia di un corpo dipende dalla sua energia?*, Annalen der Physik, 18, 639 (1905).
- A. Einstein**, *Fondamenti della teoria della relatività generale*, Annalen der Physik, 49, 769 (1916).
- A. Einstein**, *Considerazioni cosmologiche sulla teoria della Relatività Generale*, Preuss. Akad. Wiss. 142 (1917).
- A. Einstein**, *Teoria quantistica dell'irraggiamento*, Physikalische Zeitschrift, 18, 12 (1917).
- A. Einstein e K. Sitzungsber**, *Le onde gravitazionali*, Preuss. Akad. Wiss. 1, 154 (1918).
- A. Einstein**, *Teoria quantistica dei gas monoatomici - Parte I*, Preuss. Akad. Wiss., 261 (1924)
- A. Einstein**, *Teoria quantistica dei gas monoatomici - Parte II*, Preuss. Akad. Wiss., 3 (1925)
- A. Einstein**, *Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field*, Science, 84, 506 (1936).
- D.J. Griffiths**, *Introduction to Electrodynamics-IIIrd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- D. Hallyday, R. Resnik e J. Walker**, *Fundamentals of Physics-Xth ed.*, Wiley, 2014.
- Isaacson W.**, *Einstein: la Sua Vita, il Suo Universo*, Mondadori, 2010.
- K. Krane**, *Modern Physics-IIIrd ed.*, Wiley, 2012.
- H.C. Ohanian e J.T. Markert**, *Physics for Engineers and Scientists-IIIrd ed.*, Norton & Company, New York, 2007.
- R.A. Serway, C.J. Moses e C.A. Moyer**, *Modern Physics-IIIrd ed.*, Brooks/Cole-Thomson Learning, Australia, 2005.
- R. Sexl e H.K. Schmidt**, *Spaziotempo - La Relatività Ristretta*, Universale Scientifica Boringhieri, Torino, 1980.
- P.A. Tipler e R.A. Lewellyn**, *Modern Physics-VIth ed.*, W.A. Freeman and Company, New York, 2012.

**S.T. Thornton e A. Rex**, *Modern Physics for Scientists and Engineers-IVth ed.*, Cengage Learning, Boston, 2013.

**C.M. Will**, *Theory and Experiment in Gravitational Physics-Revised Edition*, Cambridge University Press, New York, 1993.

**C.M. Will**, *The renaissance of general relativity*, University of Colorado, 1997.

**C.M. Will**, *Einstein's relativity and everyday life*, American Physical Society, 2017.

**H.D. Young, R.A. Freedman e A. Lewis Ford**, *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics-XIIIth ed.*, Addison-Wesley, Boston, 2012.

## Indice analitico

- Buchi neri, 42
- Contrazione delle lunghezze, 20
  - esperimento mentale del regolo, 20
- Cosmologia di Einstein, 51
- Costante cosmologica  $\Lambda$ , 50
- Curvatura dei raggi di luce, 37
  - eclissi di Sole, 38
  - lenti gravitazionali, 38
- Curvatura dello spaziotempo, 45
  - traiettorie dei corpi, 45
- Dilatazione del tempo, 14
  - esperimento mentale della carrozza, 14
  - influenza del campo gravitazionale, 42
  - paradosso dei gemelli, 16
- Dio non gioca a dadi, 53
- Dopo la relatività, 52
  - condensato di Bose-Einstein, 53
  - Laser, 52
- Effetto Doppler relativistico, 17
  - Autoveloce, 19
  - sorgente in allontanamento, 17
  - sorgente in avvicinamento, 18
- Energia a riposo relativistica, 33
  - equivalenza tra massa ed energia, 33
- Energia cinetica, 29
  - meccanica classica, 29
  - Relatività Speciale, 30
- Energia scura, 52
- Energia totale relativistica, 33
- Equivalenza tra gravità e accelerazione, 35
  - L'uomo che cade dal tetto, 35
  - moto curvilineo, 37
- Equivalenza tra massa ed energia, 33
- Etere, 5
  - Michelson e Morley, 6
- Fotoni, 32
  - massa equivalente, 33
  - velocità della luce, 32
- Gran navilio, 6
- Gravità e radiazioni luminose, 40
- Interazione magnete-conduttore, 10
- Intervallo spazio-temporale, 24
  - invarianza, 24
- Minkowski, 25
  - diagramma di, 25
  - linee di universo, 26
  - spaziotempo, 25
- Onde gravitazionali, 46
  - prima osservazione diretta, 47
- Principio cosmologico di Einstein, 50
- Principio di relatività Galileiano, 6
- Quantità di moto
  - meccanica classica, 28
  - Relatività Speciale, 29
- Relatività Generale
  - considerazioni cosmologiche, 50
  - curvatura dello spaziotempo, 43
  - equazioni di campo di Einstein, 44
  - motivazioni, 34
  - teoria della gravitazione, 43
- Relatività Speciale, 8
  - motivazioni, 9
  - primo postulato, 9
  - secondo postulato, 10
- Simultaneità, 13
  - esperimento mentale, 13
- Sincronizzazione
  - due orologi, 9
  - reticolo di orologi, 12
- Sistemi inerziali, 4
- Somma relativistica delle velocità, 23
- Spaziotempo, 24
- Teoria relativistica della gravitazione, 43
  - accuratezza della, 47
- Trasformazioni di Galileo, 7
- Trasformazioni di Lorentz, 21