

DA EINSTEIN ALLA COSMOLOGIA MODERNA

Gianni Comini

CISM - Dipartimento di Energia e Ambiente

Piazza Garibaldi 18 - 33100 Udine

gianni.comini@cism.it

LUGLIO 2018

1 Premessa

Questo non è un trattato di cosmologia in quanto l'obiettivo, molto più modesto, è descrivere sinteticamente le risposte moderne ai problemi posti oltre un secolo fa da Albert Einstein (1879-1955) nelle sue "Considerazioni Cosmologiche sulla Teoria della Relatività Generale".

Nel seguito si accenna necessariamente ai progressi compiuti nelle osservazioni astronomiche, poiché i progressi teorici recenti sono fondati, in grandissima parte, sulla disponibilità di una enorme quantità di dati sperimentali molto accurati che sono stati raccolti negli ultimi anni grazie al miglioramento delle tecnologie tradizionali e, soprattutto, all'impiego dei satelliti. Invece qui non ci si occupa, se non molto superficialmente, di argomenti propri della cosmologia come la nucleosintesi e la formazione di elementi e strutture complesse (quali la materia visibile e oscura, le stelle, le galassie, e i pianeti, Terra inclusa).

Per quanto riguarda la comprensione del testo, un aiuto importante per meglio seguire le numerose integrazioni può venire dalla applicazione gratuita: "Integral Calculator: Integrate with Wolfram Alpha", facilmente rintracciabile cercando su Google: "integrator". L'abilità di integrazione non è facile da conservare senza esercitarla di frequente e, appunto per questo, anziché farsi scoraggiare è meglio utilizzare gli strumenti oggi disponibili in rete. In alternativa, tuttavia, è possibile anche saltare i paragrafi contrassegnati da un asterisco in quanto non indispensabili alla comprensione dei risultati.

2 La Relatività

Dopo aver rivoluzionato la Fisica Classica con la teoria della Relatività Speciale, presentata nel 1905, Einstein non riposò sugli allori ma si pose, da subito, due obiettivi molto ambiziosi

- completare la Relatività Speciale estendendone i principi ai sistemi che si muovono con moto accelerato uno rispetto all'altro e, soprattutto,
- formulare una nuova teoria della gravitazione.

Il primo obiettivo venne raggiunto nel 1907 con la enunciazione del “principio di equivalenza”. Tale principio constata, dal punto di vista dell'esecuzione di misure sperimentali, la perfetta equivalenza tra un campo gravitazionale, che non impedisce di applicare la Relatività Speciale, e un campo di moto uniformemente accelerato. Dunque la Relatività Speciale vale anche per i sistemi che si muovono con moto accelerato uno rispetto all'altro (e, da questa constatazione, deriva il nome di Relatività Generale dato da Einstein alla nuova teoria).

Il secondo obiettivo, invece, si dimostrò non raggiungibile attraverso la sola intuizione fisica. In effetti, la nuova teoria della gravitazione richiese otto anni di lavoro e l'utilizzo di metodi avanzati di geometria differenziale (alquanto ostici per un fisico che non faceva il matematico di professione). In compenso la conclusione raggiunta fu chiara e semplice: la massa incurva lo spaziotempo dando origine alla gravità, non più interpretata come *forza* ma come *costrizione* dei corpi a muoversi seguendo veri e propri binari nello spaziotempo incurvato. Di qui il celebre aforisma del fisico teorico americano John Wheeler (1911-2008):

- Lo spaziotempo dice alla materia come muoversi e la materia dice allo spaziotempo come incurvarsi. (Attesa la relazione $E = mc^2$, nel contesto dell'aforisma la massa comprende anche l'energia sotto forma di massa equivalente $m_{eq} = E/c^2$).

Raggiunti i due obiettivi, Einstein espose la teoria completa all'Accademia Prussiana delle Scienze nel novembre 1915 e, l'anno dopo, la descrisse in dettaglio nell'articolo:

- “Fondamenti della teoria della Relatività Generale”.

2.1 Le conferme

Ormai tutti riconoscono lo straordinario impatto della Relatività e, di conseguenza, il grandissimo contributo di Einstein al progresso scientifico. Non si può dire, tuttavia, che i riconoscimenti siano arrivati immediatamente: Einstein stesso ebbe il Premio Nobel per la Fisica solo nel 1921, a causa della tenace opposizione di alcuni membri del comitato scientifico. Per di più, il Nobel non gli fu assegnato per la Teoria della Relatività ma per un lavoro del 1905 sull'effetto fotoelettrico.

Il punto di vista relativistico era, infatti, molto difficile da accettare quando fu formulato (e per molti lo è ancora oggi), anche se le opposizioni hanno perso progressivamente credito a seguito dei successi ottenuti dalla teoria.

- Già nel 1915, applicando la teoria relativistica della gravitazione al calcolo dell'orbita di Mercurio, Einstein riuscì a determinare il valore corretto della precessione (ovvero dell'avanzamento) del perielio (che è il punto dell'orbita nel quale un pianeta è più vicino al Sole). Le previsioni classiche tenevano conto della presenza degli altri pianeti del sistema solare ma, ovviamente, non della curvatura dello spaziotempo e, di conseguenza, sottostimavano l'avanzamento del perielio di circa 43 secondi di arco per secolo.
- Un altro risultato eclatante fu la stima corretta della deflessione, da parte del Sole, della luce emessa dalle stelle: 1,75 secondi di grado ottenuti dai calcoli basati sulla teoria relativistica della gravitazione contro i 0,9 secondi di grado dei calcoli basati sulla gravitazione universale di Newton. La stima di Einstein, in perfetto accordo con le osservazioni astronomiche attuali, all'epoca fu comunque verificata, sia pure "a fatica", dall'astrofisico inglese Arthur Eddington (1882-1944) durante l'eclissi solare del 1919.
- Risultati di accuratezza simile, si ottengono anche applicando la teoria relativistica della gravitazione alla stima degli effetti di lente gravitazionale. Tali effetti sono oggetto di osservazioni sperimentali solo a partire dalla metà degli anni ottanta, grazie alla relativamente recente disponibilità di telescopi con sufficiente definizione e sensibilità. Le immagini attuali ci mostrano la deformazione dell'aspetto originale di galassie lontane nel passaggio attraverso gli ammassi di galassie più vicine: è il segno evidente che lo spazio, deformato dalla massa, può trasformarsi in una vera e propria "lente gravitazionale".
- Il trionfo scientifico della Relatività è stato completato di recente dalla osservazione diretta delle onde gravitazionali. Le onde gravitazionali, una volta diagrammate, hanno forma simile alle onde d'acqua ma si propagano nello spaziotempo alla velocità della luce in modo analogo alle radiazioni luminose e, di conseguenza, costituiscono una radiazione gravitazionale vera e propria. La prima osservazione diretta di onde gravitazionali ha avuto luogo il 14 settembre 2015 da parte del gruppo di ricerca statunitense LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Per tale successo, Rainer Weiss, Kip Thorne e Barry Barish (gli iniziatori, oltre 40 anni fa, del progetto LIGO negli Stati Uniti) sono stati premiati con il Nobel per la Fisica, assegnato il 3 ottobre 2017 (praticamente un secolo dopo le previsioni di Einstein) con la motivazione: "per contributi decisivi alla rivelazione e all'osservazione delle onde gravitazionali". Non è superfluo ricordare che il gruppo di ricerca italiano VIRGO (così chiamato dall'ammasso stellare

della Vergine che il gruppo osservava) ha collaborato con LIGO sin dal 2007, procedendo anche ad osservazioni congiunte. In particolare, il 14 Agosto 2017 i due rivelatori LIGO di Hanford nello stato di Washington e Livingston in Luisiana, e il rivelatore VIRGO di Cascina, in provincia di Pisa, hanno registrato simultaneamente un evento consentendo, per la prima volta, l'individuazione contemporanea del luogo di provenienza del segnale attraverso una triangolazione (che richiede, appunto, almeno tre postazioni di osservazione).

Per la sua accuratezza ed affidabilità, la teoria relativistica divenne, fin da subito, uno strumento di lavoro abituale per cosmologi e fisici delle particelle. Al contrario, gli ingegneri la consideravano troppo complessa ed inutilmente accurata per il normale uso quotidiano. La situazione, tuttavia, è cambiata negli ultimi anni, almeno per quel che riguarda la tecnologia GPS (Global Positioning System) e le sue sempre più numerose applicazioni in molti settori dell'industria del tempo libero (soprattutto in connessione con gli "smart phones") e dell'ingegneria (dapprima la navigazione aerea e marittima e, più recentemente, la guida autonoma dei veicoli terrestri).

- Per determinare la sua posizione, un ricevitore GPS utilizza il valore del tempo all'istante di emissione di un segnale, misurato dall'orologio atomico a bordo del satellite emettitore. Attesa la costanza della velocità della luce, questa informazione è sufficiente a calcolare la distanza tra ricevitore e satellite. Di conseguenza "triangolando" su tre o più satelliti è possibile calcolare anche la posizione, spaziale e temporale, del ricevitore con accuratezza tanto maggiore quanto migliore è la sincronizzazione degli orologi atomici a bordo dei satelliti. Nelle applicazioni sulle auto a guida autonoma, per esempio, è necessaria una sincronizzazione degli orologi entro i 50 picosecondi ($50 \cdot 10^{-12}$ s), tempo in cui la luce percorre 15 centimetri, distanza di sicurezza minima.

3 Considerazioni cosmologiche sulla Relatività

L'enorme sforzo necessario a formulare la teoria della Relatività Generale, le difficoltà create dalla guerra, e i problemi connessi alla rottura del suo matrimonio avevano reso alquanto precarie le condizioni di salute di Einstein. Nonostante le difficoltà esterne, Einstein riuscì a pubblicare nel 1917 l'articolo:

- "Considerazioni cosmologiche sulla teoria della Relatività Generale"

nel quale applicò all'intero universo le equazioni di campo della teoria della Relatività Generale. Fino a quel momento le indagini cosmologiche si erano limitate alle osservazioni astronomiche e, di conseguenza, le "Considerazioni" segnano la nascita della Cosmologia Moderna che, dal 1917, procederà in parallelo tra modelli matematici ed osservazioni astronomiche.

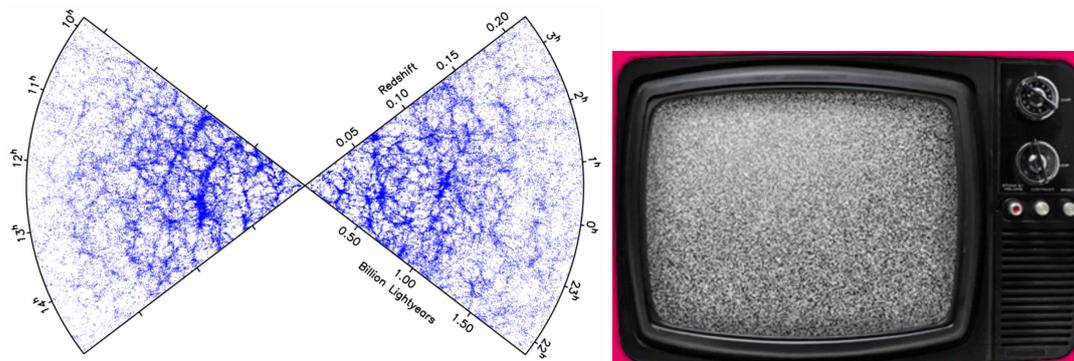


Figura 1: A sinistra: la distribuzione delle galassie è granulare su piccola scala ma diventa isotropa e omogenea e su grande scala [2dF Galaxy Redshift Survey]; a destra: analogia dedicata ai diversamente giovani.

Per risolvere le equazioni della Relatività Generale applicate all'universo, Einstein introdusse l'ipotesi, estremamente semplificativa, che l'universo fosse omogeneo ed isotropo su grandi scale. In altre parole,

- Einstein applicò il **Principio Cosmologico** assumendo che, su scale dell'ordine delle centinaia di milioni di anni luce, tutte le regioni dell'universo si assomigliassero e fossero caratterizzate da proprietà uguali in tutte le direzioni.

Per comprendere la genialità di tale intuizione bisogna ricordare che l'Astronomia, con i telescopi del 1917, “vedeva” un universo:

- certamente anisotropo e non omogeneo, in quanto limitato essenzialmente alla Via Lattea, e
- pressoché statico, in quanto anche le più lontane tra le stelle osservate si muovevano a velocità molto basse.

Al contrario, il Principio Cosmologico trova riscontro nelle più recenti indagini astronomiche in quanto, come illustrato nella Fig. 1, l'universo appare decisamente granulare su piccola scala, ma sempre più isotropo ed omogeneo (come i disturbi video nei vecchi televisori) man mano che la scala di osservazione aumenta.

Purtroppo (ovviamente dal punto di vista di Einstein), le equazioni del campo gravitazionale, semplificate dall'applicazione del principio cosmologico, indicavano chiaramente che un universo statico sarebbe collassato sotto l'azione della gravità. (Un universo in espansione, sarebbe stato rallentato dalla gravità ma, oltre che collassare, avrebbe potuto anche continuare ad espandersi sempre più lentamente). Per avere un universo

statico, come quello rilevato dalle osservazioni astronomiche del 1917, l'unica via aperta per Einstein era l'introduzione nelle equazioni del campo gravitazionale di un termine che, attraverso una **costante cosmologica** Λ , contrastasse l'azione attrattiva della gravità.

Le equazioni di campo così modificate possono essere scritte nella forma simbolica

$$\text{GEOMETRIA} - |\Lambda| \Leftrightarrow \text{MATERIA/ENERGIA} \quad (1)$$

dove il termine negativo contenente la costante cosmologica (qui scritto per chiarezza come valore assoluto) riduce la curvatura dello spaziotempo contrastando, in un certo senso, l'azione della gravità. Tuttavia, nemmeno con l'aggiunta della costante cosmologica, le equazioni di campo della Relatività Generale garantivano un equilibrio stabile. La costante cosmologica, infatti, doveva avere un valore ben preciso e sarebbe bastata qualunque piccola perturbazione per interferire con condizioni di equilibrio assicurate faticosamente e, di conseguenza, far collassare od espandere l'universo.

D'altra parte, l'obiettivo di Einstein non era dare basi scientifiche alla Cosmologia ma, piuttosto, dimostrare l'applicabilità della sua teoria a tutte le scale dimensionali: da quella microscopica dei fotoni, da lui già considerati in quanto componenti delle radiazioni luminose (ed elettromagnetiche in generale), a quella "cosmologica" dell'universo. Non essendoci riuscito, definì "un errore" la costante cosmologica introdotta, secondo le sue stesse parole: "al solo scopo di consentire una distribuzione quasi-statica di materia compatibile con la bassa velocità delle stelle".

In realtà i grandi geni commettono solo errori fortunati e la costante cosmologica, rifiutata perché non garantiva un universo statico, è tornata recentemente in auge come spiegazione più semplice della possibilità di espansione accelerata dell'universo. In armonia con tale spiegazione, le equazioni di campo vengono attualmente scritte nella forma simbolica modificata

$$\text{GEOMETRIA} \Leftrightarrow \text{MATERIA/ENERGIA NORMALE} + |\Lambda| \quad (2)$$

dove il termine contenente la costante cosmologica è spostato al secondo membro in modo da contribuire all'incremento della materia/energia nell'universo. Tale termine viene, infatti, identificato con l'energia del vuoto

$$|\Lambda| = \text{ENERGIA VUOTO} \quad (3)$$

ed è, quasi sempre, indicato con il nome di "energia oscura".

3.1 Analisi delle equazioni cosmologiche*

Le equazioni di campo di Einstein, modificate per tener conto della costante cosmologica, possono essere convenientemente scritte come

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4)$$

In questo modo la (4) ricalca perfettamente la forma simbolica (1), nella quale la costante cosmologica serve a ridurre lo scalare di curvatura attenuando l'effetto gravitazionale complessivo.

Come si è già osservato, tuttavia, nell'interpretazione moderna si preferisce spostare la costante cosmologica al secondo membro, modificando il tensore materia/energia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g_{\mu\nu}) \quad (5)$$

in armonia con la forma simbolica (2).

A questo punto gli sviluppi analitici si fanno semplici ma le spiegazioni diventano complesse. Comunque, rinunciando ad accuratezza e rigore, si può dire che il termine al secondo membro contenente la costante cosmologica è interpretabile come “pressione negativa esercitata dal vuoto”

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (6)$$

Successivamente si può sfruttare la relazione esistente tra pressione e densità di energia del vuoto

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \quad (7)$$

per determinare la densità di energia del vuoto

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (8)$$

che è correntemente chiamata “energia oscura”.

In Cosmologia si usano diversi sistemi di unità di misura che confondono alquanto chi, come gli Ingegneri, è stato educato ad utilizzare il **Sistema Internazionale di Unità di Misura - SI**. Molto popolari tra i cosmologi sono, ad esempio:

- il **Sistema di Unità Naturali** nel quale si pongono uguali all'unità diverse costanti fisiche fondamentali tra le quali la velocità della luce assumendo: $c = 1$ invece di $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s e
- il **Sistema di Unità Geometrizzate**, nel quale si pongono uguali all'unità la velocità della luce assumendo ancora: $c = 1$ invece di $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s, e la costante di Newton assumendo: $G = 1$ invece di $G = 6,6743 \cdot 10^{-11}$ m³/(kg s²).

Poiché qui non si cerca di “insegnare” ai Cosmologi ma di facilitare la lettura di chi cosmologo non è, nelle relazioni (4)-(8) si è utilizzato il Sistema Internazionale. A questo proposito può essere interessante osservare che

- il tensore di Riemann $R_{\mu\nu}$ e lo scalare di curvatura R si misurano in [m⁻²];
- il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è adimensionale;

- il tensore materia/energia $T_{\mu\nu}$ si misura in joule per metro cubo [J m^{-3}], e di conseguenza
- la costante cosmologica Λ si misura in [m^{-2}].

Ovviamente, come è noto dalla meccanica dei fluidi, sia la pressione p sia il prodotto di una densità per una velocità al quadrato (ad esempio: ρc^2), si misurano in chilogrammi su metro per secondo al quadrato [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$].

4 L'espansione dell'universo

Naturalmente, il progresso tecnologico non si arrestò al 1917 e, man mano che si resero disponibili nuovi telescopi e nuovi metodi di osservazione, la porzione osservabile di universo aumentò. In questo modo, ci si rese conto del fatto che tutti i corpi celesti si allontanano dalla Terra e che la velocità di allontanamento è, grosso modo, proporzionale alla distanza.

Secondo il Principio Cosmologico non esistono punti di osservazione privilegiati ed, infatti, tutti i corpi celesti si allontanano da tutti gli altri: l'universo intero è in espansione. L'espansione di un universo piano come il nostro è illustrata nella Fig. 2 a sinistra, dove si vede che le posizioni dei corpi celesti rimangono fisse rispetto a un sistema di coordinate comoventi (ovvero che si muovono insieme ai corpi), mentre le distanze tra due punti qualunque, caratterizzati da coordinate comoventi diverse, aumentano col tempo. Inoltre, come illustrato nella Fig. 2 a destra, prima di ogni considerazione quantitativa va precisato che l'espansione riguarda le distanze reciproche dei corpi celesti ma non le dimensioni dei corpi stessi (che sono compattati dalla gravità).

4.1 Legge di Hubble

Dal nostro punto di vista di abitanti della Terra al tempo presente, è conveniente esprimere le distanze mediante la relazione quantitativa

$$D = a(t)D_0 \quad (9)$$

dove D è la distanza di un generico corpo celeste al tempo t , D_0 è la distanza al tempo presente t_0 e $a(t)$ è un fattore scala (adimensionale) per il quale si ha $a(t_0) = 1$.

Per le velocità di allontanamento, vale la legge empirica enunciata da Edwin Hubble (1889-1953)

$$v_0 = H_0 D_0 \quad (10)$$

dove il pedice 0 indica che velocità v , distanza D e parametro di Hubble H sono riferiti al tempo presente. Dal punto di vista analitico, sostituendo la definizione (9) nei due

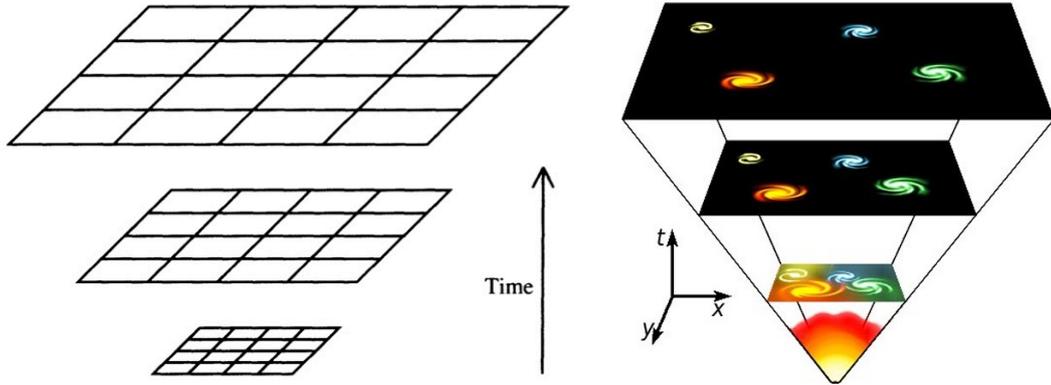


Figura 2: Espansione di un universo piano. A sinistra: il sistema di coordinate comoventi è “trasportato” dall’espansione e i diversi punti mantengono i valori di tali coordinate [A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*]. A destra: l’espansione riguarda le distanze tra i corpi celesti ma non le dimensioni dei corpi stessi, compattati dalla gravità [The Physics of the Universe].

membri della legge di Hubble (10), ed utilizzando il puntino sovrastante al simbolo per denotare una derivata temporale, si ottiene in sequenza

$$v_0 = \dot{D}(t_0) = \dot{a}(t_0)D_0 \quad \text{e} \quad H_0 D_0 = H_0 a(t_0) D_0 \quad (11)$$

Uguagliando gli ultimi membri delle due relazioni riportate nella (11) si arriva alla nuova definizione

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (12)$$

da cui si evince che H_0 è interpretabile anche come velocità di variazione, valutata al tempo presente, del fattore scala che caratterizza l’espansione dell’universo.

Nella storia dell’universo, il rapporto

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (13)$$

è cambiato nel tempo e, per questo motivo, H non può essere definito “costante” ma deve, appunto, essere definito “parametro”. Al tempo presente, il parametro H_0 viene valutato in base alla (10) come pendenza della retta che meglio correla i valori sperimentali oggi disponibili per la velocità di allontanamento e la distanza dalla Terra dei corpi celesti in grafici del tipo di quello riportato in Fig. 3.

Naturalmente, le stime di pendenza attuali sono diverse rispetto a quella proposta da Hubble in quanto, nel frattempo, si sono rese disponibili rilevazioni sperimentali sempre

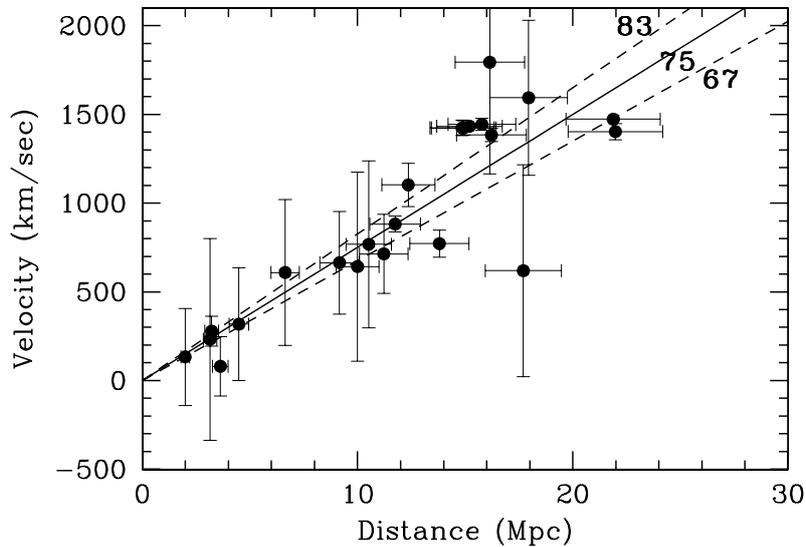


Figura 3: Grafico di Hubble: velocità di allontanamento dei corpi celesti in funzione della distanza valutate al tempo presente [W.L. Freedman et al., *The Astrophysical Journal*, 2001].

più accurate. In questo modo, evidentemente, si sono progressivamente ridotti i margini di errore e, al 2017, la stima che riscuote i maggiori consensi è:

$$H_0 = 68 \pm 2 \text{ (km s}^{-1}\text{)/Mpc}$$

(Come già osservato, in Cosmologia si usano spesso unità strane. Il megaparsec [Mpc] è una di queste e vale:

$$1 \text{ Mpc} = 3,26 \cdot 10^6 \text{ anni luce} = 3,084 \cdot 10^{19} \text{ km} \Rightarrow 1 \text{ pc} = 3,26 \text{ anni luce}$$

dove l'anno luce è una misura di distanza, essendo il percorso coperto in un anno dalle radiazioni luminose). La scrittura precedente ci informa, quindi, che per ogni aumento della distanza di 1 Mpc, la velocità di allontanamento aumenta di 68 km/s).

4.2 Il “Big Bang”

Il termine “Big Bang” (grande esplosione) fu usato per la prima volta in senso ironico dall'astrofisico inglese Fred Hoyle (1915-2001) durante una sua lezione sulla Natura dell'Universo trasmessa dalla BBC nel 1949. Come diversi astrofisici dell'epoca, infatti, anche Hoyle credeva che l'universo non potesse avere ne' un inizio ne' una fine: un convincimento, attualmente, abbandonato da tutti (tranne alcuni blogger particolarmente agguerriti).

Del resto l'idea del Big Bang è insita nella legge di Hubble: se, ad esempio, l'universo si fosse sempre espanso alla velocità attuale, in un istante remoto facilmente determinabile in base alla (10), tutti i corpi celesti si sarebbero trovati ad una distanza nulla uno dall'altro. Infatti, non bisogna dimenticare che, per quanto camuffato in unità strane, H_0 è pur sempre un rapporto tra velocità e distanza e, quindi, è il reciproco di un tempo (come ben si vedrebbe nel sistema Sistema Internazionale in cui le dimensioni di $1/H_0$ sono $[s^{-1}]$). Il reciproco del parametro di Hubble valutato al tempo attuale

$$\frac{1}{H_0} = \frac{D_0}{v_0} \quad (14)$$

prende il nome di **tempo di Hubble** ed è pari a:

$$t_H = \frac{1}{H_0} \cong 14 \cdot 10^9 \text{anni}$$

Si tratta di un valore non molto lontano da quello delle più accreditate stime recenti dell'età dell'universo: 13,7 miliardi di anni.

A questo punto ci si può anche chiedere se vi sono corpi celesti che, a causa dell'espansione dell'universo, si stanno allontanando dalla Terra con una velocità maggiore di quella della luce. La risposta è ancora semplice: basta mettere $v_0 = c$ nella (10) per trovare la distanza alla quale la velocità di espansione dell'universo raggiunge la velocità della luce. Tale distanza, è definita **distanza di Hubble**

$$D_H = \frac{c}{H_0} \quad (15)$$

e, attualmente, è pari a

$$D_H = \frac{300.000}{68} \cong 4.400 \text{ Mpc} \cong 14,4 \text{ miliardi di anni luce}$$

dove, come si è già osservato, l'anno luce è una misura di lunghezza (e non di tempo). Quindi, tutti i corpi celesti che, attualmente, si trovano ad una distanza superiore a 4.400 Mpc, ovvero superiore a 14,4 miliardi di anni luce, si allontanano a una velocità superiore a quella della luce. (Questo fatto, tuttavia, non comporta alcuna violazione delle Relatività Speciale che si applica ai movimenti relativi *nello spazio* e non all'espansione *dello spazio*. Per lo stesso motivo il "redshift cosmologico", definito nel Paragrafo 4.3, non è attribuibile a un effetto Doppler).

All'età dell'universo ed alla distanza di Hubble è collegato anche il problema della distanza massima osservabile attualmente, ovvero il problema dell'**orizzonte dell'universo**. Evidentemente, un segnale luminoso osservabile ora (cioè all'istante t_0), non può essere stato emesso ad un istante t_e precedente al Big Bang, ovvero l'intervallo temporale nel quale possiamo "guardare indietro", definito **lookback time**, non può superare i

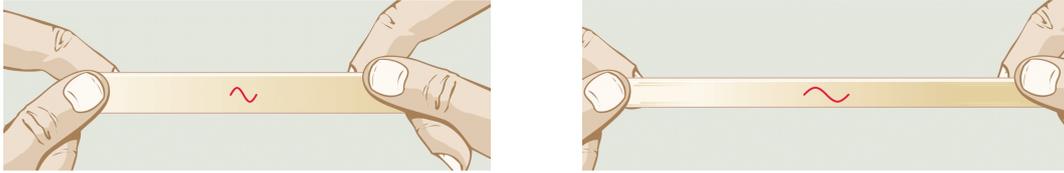


Figura 4: Analogia tra allungamento di un elastico e aumento di lunghezza delle onde, incluse quelle luminose [D. Koerner, Northern Arizona University].

13,7 miliardi di anni, poiché la luce non può avere viaggiato per un tempo superiore alla vita dell'universo. Tuttavia, a causa dell'espansione dell'universo intervenuta dall'istante di emissione a quello di osservazione, la distanza propria osservabile attualmente è ben superiore alla distanza di Hubble D_H : secondo le stime più recenti è pari, infatti, a circa $3,20 D_H$, ovvero a circa 46,1 miliardi di anni luce.

4.3 “Redshift” cosmologico

L'espansione dello spazio non induce solo l'allontanamento reciproco delle galassie, ma anche l'allungamento dei percorsi tra i corpi celesti, inclusi i percorsi delle onde elettromagnetiche luminose. L'analogia monodimensionale è quella con un elastico che viene allungato come in Fig. 4.

In armonia con la Fig. 4, dalla relazione:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (16)$$

tra frequenza f e lunghezza d'onda λ , segue che la radiazione emessa dagli oggetti cosmici remoti arriva con una lunghezza d'onda maggiore e, quindi, una frequenza minore (ovvero spostata verso il rosso) rispetto a quella emessa in origine. Si tratta dell'effetto di “redshift cosmologico” z quantificato nella relazione

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t)}{\lambda(t)} = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t)} - 1 \quad (17)$$

che, in base all'analogia di Fig. 4, può essere scritta anche nelle forme

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{1}{1+z} \quad (18)$$

Per onde luminose emesse a un istante t non troppo distante da t_0 , ovvero per corpi celesti non troppo lontani, si può trascurare l'espansione dell'universo durante il viaggio

della radiazione. Di conseguenza, tra il tempo di viaggio $(t_0 - t)$ e la distanza D percorsa dalla radiazione sussiste il legame lineare

$$t_0 - t = \frac{D}{c} \quad (19)$$

valido, appunto, quando si può trascurare l'allungamento del percorso D nell'intervallo temporale $(t_0 - t)$.

Nel paragrafo seguente si dimostra che dalle (18) e (19) e dalle definizioni (12) e (15) si ottiene tutta una serie di relazioni lineari

$$z = \frac{D}{c} H_0 \Rightarrow D = \frac{c}{H_0} z \Rightarrow v = cz \quad (20)$$

valide per piccoli valori del redshift (ad esempio $z < 0,02$). Dal punto di vista applicativo, si può notare che la prima delle relazioni (20) ricalca la legge di Hubble, mentre la terza consente il calcolo della velocità di recessione noto il redshift. Per quanto riguarda i limiti superiori di validità, posto $z = 0,02$, dalla seconda e dalla terza delle relazioni (20) si ricava

$$D = \frac{cz}{H_0} < \frac{6.000}{68} = 88,2 \text{ Mpc} \quad \text{e} \quad v = cz < 6.000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

mentre dalla (19) si ha

$$(t_0 - t) = \frac{D}{c} < 88,2 \cdot 3,26 = 287,5 \text{ milioni di anni}$$

attesa l'equivalenza: 1 Mpc = 3,26 anni luce.

4.3.1 Dal redshift alla velocità di espansione*

In armonia con il precedente paragrafo, nell'ipotesi di piccoli valori del redshift (ad esempio $z < 0,02$), ovvero con onde luminose emesse non troppo tempo fa e, quindi, provenienti da corpi celesti non troppo lontani, si può valutare il fattore di scala mediante uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine

$$a(t) = a(t_0)[1 + (t - t_0)\dot{a}(t_0)]$$

Successivamente, tenendo conto della definizione (18) a destra, si ottiene

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 - \frac{D}{c}\dot{a}(t_0) \Rightarrow \frac{1}{1+z} = 1 - \frac{D}{c}H_0$$

A questo punto, si può applicare l'approssimazione binomiale:

$$(1+z)^n \cong 1 + nz$$

certamente valida per $z < 0,02$. Nella situazione che qui interessa si ha $n = -1$ e, quindi, si ottiene

$$\frac{1}{1+z} \cong 1 - z$$

Pertanto risulta anche

$$1 - z = 1 - \frac{D}{c}H_0$$

ovvero

$$z = \frac{D}{c}H_0 \Rightarrow D = \frac{c}{H_0}z \Rightarrow v = cz$$

che sono le relazioni cercate.

5 Le equazioni di Friedmann

Le equazioni di Einstein, semplificate dall'applicazione del Principio Cosmologico, furono risolte per la prima volta nel 1922 dal fisico e matematico russo Alexander Friedmann (1888-1925).

Nel modello proposto da Friedmann, una volta introdotto il Principio Cosmologico l'universo risulta omogeneo e isotropo nello spazio e, di conseguenza, l'unica variabile è quella temporale: le equazioni di Einstein, infatti, si riducono ad una coppia di equazioni differenziali ordinarie dove la variabile temporale è rappresentata dal fattore di scala $a(t)$. Nella concezione originale, quindi, risolvere le equazioni di Friedmann significa trovare l'andamento nel tempo del fattore di scala $a(t)$, ovvero del redshift scritto nella forma $z = [1/a(t) - 1]$ con $a(t_0) = 1$. (Nel seguito, tuttavia, si vedrà come esistano procedure che consentono di esprimere direttamente in funzione del redshift altre grandezze fisiche, come la distanza, che meglio si prestano al confronto con le osservazioni astronomiche).

In via preliminare, comunque, è conveniente sgombrare il campo da possibili obiezioni metodologiche chiedendosi se è proprio necessario formulare dei modelli di calcolo per trovare l'andamento nel tempo del fattore di scala $a(t)$ quando, nei paragrafi precedenti, si sono ricavate sperimentalmente relazioni importanti come la legge di Hubble assumendo: $a(t) \cong a(t_0)$. Purtroppo va ribadito che, solo per valori del redshift molto piccoli ($z < 0,02$), è lecito trascurare l'espansione dell'universo durante il viaggio della radiazione.

Nel caso, ben più frequente, di $z > 0,02$, l'espansione dell'universo non è trascurabile e la sua misura diretta non è possibile. Infatti, posto $a(t_0) = 1$, dalla (18) si ha

$$a(t_e) = \frac{1}{1+z_e} \quad (21)$$

per la luce emessa da un galassia al tempo t_e . Pertanto, si può misurare il redshift dell'emissione e da questo risalire al fattore di scala $a(t_e)$ al momento dell'emissione, ma non

c'è alcuna procedura sperimentale per ottenere informazioni dirette sul tempo trascorso ($t_0 - t_e$) dal momento dell'emissione. Quindi, senza il modello proposta da Friedmann si può solo dire, qualitativamente, che il tempo trascorso aumenta al crescere del redshift in quanto diminuisce il fattore di scala mentre, evidentemente, il segnale proveniente da un universo più piccolo è caratterizzato da un valore di ($t_0 - t_e$) più grande.

Ciò premesso va ricordato che le equazioni originali di Friedmann furono modificate a più riprese dopo il 1922. Tra le modifiche “importanti” si possono citare quelle apportate, già nel 1927, dal gesuita e astronomo belga Georges Lemaître (1894-1966) il quale, indipendentemente dal lavoro di Friedmann (che non conosceva), ipotizzò un universo in continua espansione e, di conseguenza, propose di incorporare la costante cosmologica nelle equazioni stesse. Un'ulteriore importante modifica riguardò la forma delle equazioni di Friedmann che fu adeguata alla “metrica” (ovvero alla descrizione geometrica dell'universo) dovuta ad Howard Robertson (1903-1961) e Arthur Walker (1909-2001). [A questo proposito, nel Paragrafo 6 si dimostrerà quanto già implicitamente ammesso nella Fig. 2: ovvero che il nostro è un universo piano nel quale la metrica di Robertson-Walker si semplifica considerevolmente riducendosi alla sola Eq. (9)].

5.1 Il modello FLRW

Nella loro versione corrente, le equazioni di Friedmann vengono, di solito, indicate col nome di Modello FLRW (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker) in quanto incorporano la costante cosmologica, come suggerito da Lemaître, e utilizzano la metrica di Robertson e Walker.

Con riferimento al Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI), le due equazioni del Modello FLRW si possono scrivere nelle forme:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (22)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \left(1 + 3\frac{p}{\rho c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (23)$$

dove un puntino indica la derivata temporale prima (velocità) e due puntini indicano la derivata temporale seconda (accelerazione): pertanto, il fattore di scala adimensionale a implica che \dot{a} si misuri in [s^{-1}] e \ddot{a} si misuri in [s^{-2}].

Nelle equazioni (22) e (23), la densità ρ è intesa in senso relativistico (senza distinguere tra materia vera e propria ed energia) e, quindi, si misura in [$kg\ m^{-3}$], mentre la pressione p si misura in [$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$] e, infatti, p e ρc^2 hanno le stesse dimensioni.

Come si può facilmente verificare, le precedenti scelte di unità di misura fanno sì che tutti i termini delle equazioni (22) e (23) abbiano la stessa dimensione di secondi alla meno due [s^{-2}].

5.1.1 Interpretazione della costante cosmologica

La densità ρ , nelle (22) e (23), e la pressione p , nella (23), sono valori totali calcolati come somma di contributi dei diversi componenti. Nel modello FLRW i componenti fisici sono, sostanzialmente, due:

- la materia, visibile e oscura, considerata senza distinzioni in quanto il comportamento, rispetto alla gravitazione, non cambia, e
- la radiazione, intesa come insieme di particelle relativistiche, ovvero particelle (come fotoni e neutrini) che si muovono alla velocità della luce.

D'altra parte in armonia con l'interpretazione corrente della costante cosmologica, espressa nelle due relazioni (8) e (6) qui riunite e ripetute per comodità, si ha anche

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad \text{e} \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Pertanto, tutto accade come se nel modello FLRW operasse anche un terzo componente non fisico, ovvero

- la costante cosmologica che dà luogo alla densità di energia e alla pressione negativa del vuoto riportate più sopra.

In base a quest'ultima interpretazione, che attualmente è la più seguita, le equazioni (22) e (23) possono essere scritte nelle forme compatte:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i - \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (24)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i \left(1 + 3\frac{p_i}{\rho_i c^2}\right) = -\frac{4}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i (1 + 3w_i) \quad (25)$$

dove

$$\rho = \sum_{i=1}^3 \rho_i \quad (26)$$

mentre, per brevità, i contributi di materia, radiazione e costante cosmologica sono identificati con il pedice variabile i intendendo, ad esempio

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = \rho_m & p_1 = p_m & w_1 = w_m \\ \rho_2 = \rho_r & p_2 = p_r & w_2 = w_r \\ \rho_3 = \rho_\Lambda & p_3 = p_\Lambda & w_3 = w_\Lambda \end{array} \quad (27)$$

con ovvio significato: m = materia, r = radiazione e Λ = vuoto. (Le definizioni delle costanti w_i saranno discusse nel paragrafo che segue).

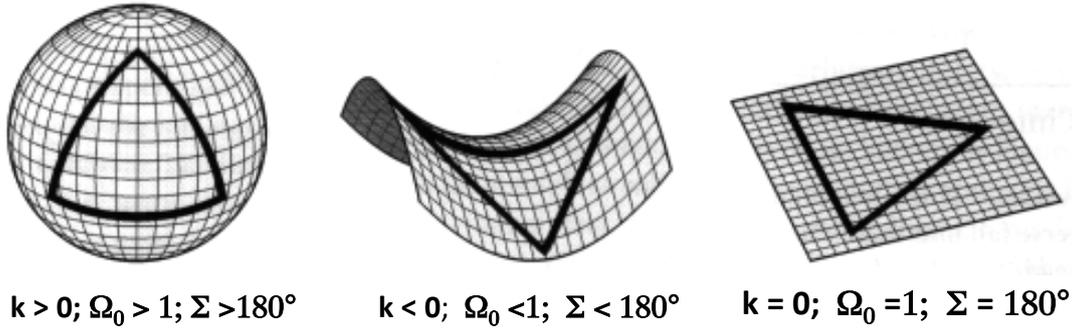


Figura 5: Curvatura gaussiana k , densità adimensionale Ω e somma Σ degli angoli interni di un triangolo [*University of Oregon, modificata*].

5.1.2 Equazioni di stato

Nella Eq. (25), in analogia a quanto si fa nella teoria cinetica dei gas ideali, si dà il nome di equazioni di stato alle relazioni:

$$\frac{p_i}{\rho_i c^2} = w_i \quad (28)$$

nelle quali i valori w_i dei rapporti adimensionali $p_i/(\rho_i c^2)$ vengono determinati in base a considerazioni di carattere fisico. Infatti, si ha:

- $w_m = w_1 \cong 0$ per la materia, in quanto la pressione è proporzionale all'energia cinetica media delle "particelle cosmiche" che, muovendosi a velocità non relativistiche, sono caratterizzate da un'energia cinetica media certamente trascurabile rispetto a ρc^2 ;
- $w_r = w_2 = 1/3$ per la radiazione in quanto formata da particelle che si muovono alla velocità della luce e, quindi, numeratore e denominatore nella (28) hanno lo stesso ordine di grandezza (ed, effettivamente, la teoria cinetica stima pari a 1/3 il loro rapporto);
- $w_\Lambda = w_3 = -1$ per la componente associata alla costante cosmologica, in base alle già richiamate relazioni (6) e (8).

5.1.3 Curvatura e densità critica

La curvatura Gaussiana k , che compare nella (24), è definita come il prodotto delle due curvatures principali misurate in due direzioni ortogonali:

$$k = \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} \quad (29)$$

Di conseguenza, come si vede nella Fig. 5, si ha:

- $k = 1/r^2 > 0$, essendo $r_1 = r_2 = r$ per una superficie sferica di raggio r ;
- $k < 0$ per una superficie iperbolica (in quanto le due curvatures principali hanno segno opposto dal momento che si collocano sulle facce opposte della superficie);
- $k = 0$ per una superficie piana, essendo $r_1 = r_2 \cong \infty$ e, di conseguenza, $1/r_1 = 1/r_2 \cong 0$.

Già dal titolo del paragrafo si può evincere che la curvatura è strettamente legata alla densità dell'universo e, in particolare, alla **densità critica**, ovvero alla densità dell'universo per la quale si ha $k = 0$. Per calcolare la densità critica si può partire dalla relazione (24) scritta nella forma

$$H^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{a^2}$$

dove, in base alla (26), la densità totale è valutata come somma delle densità dei componenti. Posto $k = 0$ nella relazione precedente si ottiene subito

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (30)$$

Il valore così calcolato dipende dal parametro di Hubble H e, di conseguenza, varia nel tempo. Un valore importante è quello relativo al tempo presente per il quale si ha

$$H_0^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = (\rho_{cr})_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (31)$$

e si possono definire i rapporti adimensionali

$$(\Omega_i)_0 = \frac{(\rho_i)_0}{(\rho_{cr})_0} \quad i = 1...3 \quad (32)$$

Evidentemente:

- in un universo a geometria piana si ha $k = 0$, ovvero $\rho_0 = (\rho_{cr})_0$, e

$$(\Omega)_0 = \sum_{i=1}^3 (\Omega_i)_0 = \frac{\rho_0}{(\rho_{cr})_0} = 1 \quad (33)$$

- in un universo a geometria sferica si ha $k > 0$, ovvero $\rho_0 > (\rho_{cr})_0$, e

$$(\Omega)_0 = \sum_{i=1}^3 (\Omega_i)_0 = \frac{\rho_0}{(\rho_{cr})_0} > 1 \quad (34)$$

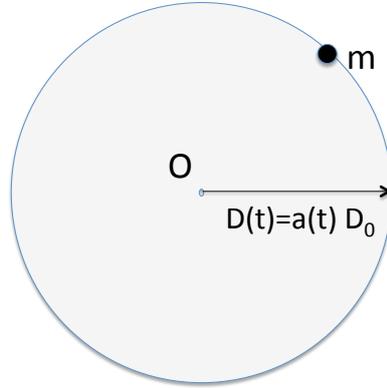


Figura 6: Sfera con centro nel punto O in cui si trova l'osservatore, e raggio pari alla distanza D alla quale si colloca una generica massa unitaria $m = 1$.

- mentre in un universo a geometria iperbolica si ha $k < 1$, ovvero $\rho_0 < (\rho_{cr})_0$, e

$$(\Omega)_0 = \sum_{i=1}^3 (\Omega_i)_0 = \frac{\rho_0}{(\rho_{cr})_0} < 1 \quad (35)$$

Infine, dalla Fig. 5 si evince che un conveniente criterio pratico per riconoscere la tipologia di una superficie è misurare la somma Σ degli angoli interni di un triangolo tracciato sulla superficie stessa. Infatti, tale somma risulta maggiore, minore o uguale a 180° rispettivamente per le superfici sferiche, iperboliche o piane.

Nel Paragrafo 6 si verificherà quanto già ripetutamente osservato: il nostro è un universo piano caratterizzato, di conseguenza, da $k = 0$ e $(\Omega_i)_0 = 1$. A questo proposito va sottolineato che la curvatura spaziale k è una costante geometrica indipendente dal tempo e, quindi, il nostro universo è stato piano anche in passato, fin dai primi istanti dopo il Big Bang. D'altra parte, una condizione iniziale così vincolante non può essere dettata dal caso e, nel Paragrafo 9.2, si cercherà di spiegarla, sia pure a livello elementare.

5.1.4 Significato fisico delle equazioni di Friedmann*

Con riferimento alla Figura 6, si consideri la porzione di universo delimitata dalla sfera con centro nel punto O , dove si trova l'osservatore, e raggio pari alla distanza D alla quale si colloca una generica massa unitaria $m = 1$. Se l'universo si espande o contrae, in base alla (9) si ha

$$D = a(t)D_0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{D_0}{D}$$

con il solito significato dei simboli. In un universo piano come il nostro si ha $k = 0$ e, di conseguenza, la prima equazione di Friedmann (24) può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{2}m\dot{a}^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho a^2 m = 0 \quad (36)$$

dove entrambi i termini sono stati moltiplicati per ma^2 (con $m = 1$, massa unitaria) e, in base alla (26), la densità è intesa come densità totale.

A questo punto è facile convincersi che il primo termine rappresenta l'energia cinetica posseduta da m

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 \quad (37)$$

ovvero l'energia cinetica per unità di massa.

Oltre ad energia cinetica, la massa m possiede anche energia potenziale gravitazionale, in quanto su di essa agisce gravitazionalmente la massa M contenuta nella sfera ideale di raggio pari alla distanza D dall'osservatore alla quale m si trova. (Come è noto dalla Meccanica, infatti, una massa sferica M genera al suo esterno lo stesso campo gravitazionale generato da una pari massa M posta al centro della sfera). Per definizione poi, l'energia potenziale gravitazionale posseduta da m è pari al lavoro meccanico necessario per portare m dal punto considerato al riferimento naturale in cui si ha $U_{grav} = 0$. Assumendo come riferimento naturale una distanza infinita da O (in quanto ad una distanza infinita l'azione attrattiva di M si è certamente esaurita), risulta

$$U_{grav} - 0 = - \int_D^\infty m \frac{GM}{(D')^2} dD' = GMm \frac{1}{D'} \Big|_D^\infty = -\frac{1}{D}GMm \quad (38)$$

ovvero

$$U_{grav} = -\frac{1}{D}GMm = -\frac{4}{3}\pi G\rho \frac{D^3}{D}m = -\frac{4}{3}\pi G\rho \frac{a^3}{a}m = -\frac{4}{3}\pi G\rho a^2 m \quad (39)$$

Pertanto, il secondo termine della (36) rappresenta il potenziale gravitazionale per unità di massa, ovvero l'energia potenziale posseduta da m in quanto immersa nel campo gravitazionale dell'universo.

Poiché la massa m è una massa generica, quanto trovato vale per tutti i punti dell'universo e, di conseguenza, per tutto l'universo. Quindi la prima equazione di Friedmann esprime il principio di conservazione dell'energia meccanica nell'universo, scritto nella forma:

$$(E_{cin} + U_{grav})_{universo} = (E_{totale})_{universo} = 0 \quad (40)$$

A questo punto, può essere interessante notare che, in base alla (40), l'energia meccanica totale dell'universo (somma di energia cinetica e di energia potenziale gravitazionale) è pari a zero in tutti i punti. Le considerazioni di natura anche filosofica su questo risultato non mancano in letteratura e sono certamente interessanti. Tuttavia, una loro discussione approfondita supera certamente gli obiettivi che qui ci si pone.

Il significato fisico della seconda equazione di Friedmann, ripetuta per comodità

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i (1 + 3w_i)$$

è chiaro di per sé: al secondo membro le densità di materia, con $w_1 = w_m = 0$, e radiazione, con $w_2 = w_r = 1/3$, darebbero luogo ad una decelerazione ($\ddot{a} < 0$). Tale decelerazione, però, è contrastata dalla densità di energia del vuoto, con $w_3 = w_\Lambda = -1$, eventualmente fino ad indurre una accelerazione ($\ddot{a} > 0$).

5.2 Versioni adimensionali del modello FLRW*

In un universo piano, con $k = 0$, il primo e il terzo membro della **Prima Equazione di Friedmann** nella forma (24), porgono:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i \quad (41)$$

Dividendo membro a membro per la definizione a sinistra nella (31) si ottiene:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{(\rho_{cr})_0} \quad (42)$$

Successivamente, moltiplicando e dividendo il termine i -simo all'interno della sommatoria per la stessa quantità $(\rho_i)_0$, si arriva alla espressione adimensionale sintetica:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=1}^3 (\Omega_i)_0 \frac{\rho_i}{(\rho_i)_0} \quad (43)$$

dove i parametri adimensionali $(\Omega_i)_0$ sono definiti dalla (32).

I parametri $(\Omega_i)_0$ descrivono la composizione dell'universo attuale e, come vedremo meglio nel Paragrafo 6, hanno valori sui quali la comunità scientifica concorda. Pertanto, l'evoluzione del parametro di Hubble al primo membro della (43) è determinata dalle evoluzioni $\rho_i/(\rho_i)_0$ delle densità dei diversi componenti. Tali evoluzioni, a loro volta, sono stimabili in base alle considerazioni di carattere fisico illustrate qui sotto.

- Per il componente **materia** ($i = 1 = m$), è lecito ipotizzare che la quantità di materiale sia rimasta costante da un certo momento (molto vicino al Big Bang) in cui si aveva $a(t) \ll 1$, fino ad oggi in cui si ha $a(t_0) = 1$, mentre il volume dell'universo è aumentato in proporzione al cubo del fattore di scala a . Si ha, quindi:

$$\frac{\rho_m}{(\rho_m)_0} = \frac{(V_m)_0}{V_m} = \frac{1}{a^3} \quad (44)$$

- Per il componente **radiazione** ($i = 2 = r$), è lecito ipotizzare l'esistenza di un gas di particelle che si muovono alla velocità della luce costituito, da un certo momento in poi, da un numero costante di particelle nell'intero volume (come si vedrà meglio al Paragrafo 9.1). Di conseguenza, la densità di tale gas è ancora inversamente proporzionale al volume ma, in questo caso, l'aumento del volume dell'universo è accompagnato dall'effetto aggiuntivo del redshift dovuto all'aumento delle lunghezze d'onda e alla conseguente riduzione delle frequenze (che riguarda tutte le particelle relativistiche, e non i soli fotoni). Si ha, quindi:

$$\frac{\rho_r}{(\rho_r)_0} = \frac{1}{a^4} \quad (45)$$

- Per il componente associato al **vuoto** ($i = 3 = \Lambda$), nulla è cambiato nel tempo in quanto l'universo ha sempre aumentato le sue dimensioni assorbendo la stessa quantità di energia per unità di volume di espansione nel vuoto. Si ha quindi

$$\frac{\rho_\Lambda}{(\rho_\Lambda)_0} = 1 \quad (46)$$

In base a tali considerazioni, la espressione adimensionale (43) può essere espansa scrivendo:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{(\Omega_m)_0}{a^3} + \frac{(\Omega_r)_0}{a^4} + (\Omega_\Lambda)_0 \quad (47)$$

Tenuto conto della uguaglianza $a = 1/(1+z)$, la (47) può essere scritta anche nella forma alternativa:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = (\Omega_m)_0(1+z)^3 + (\Omega_r)_0(1+z)^4 + (\Omega_\Lambda)_0 \quad (48)$$

Le due espressioni (47) e (48) della prima equazione di Friedmann sono equivalenti e vengono utilizzate scegliendo l'una o l'altra a seconda della convenienza.

Il primo e il terzo membro della **Seconda Equazione di Friedmann** (25), scritti con i segni scambiati, porgono

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i(1+3w_i) \quad (49)$$

Facendo riferimento al tempo presente e dividendo membro a membro per la relazione a destra nella (31) si ottiene:

$$-\left(\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right)_0 = q_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{(\rho_{cr})_0} (1+3w_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\Omega_i)_0 (1+3w_i) \quad (50)$$

dove q_0 , definito dai primi due membri della (50), è il parametro di decelerazione valutato al tempo presente in base, ad esempio, al quarto membro della stessa relazione. Si ha quindi

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\Omega_i)_0 (1 + 3w_i) \quad (51)$$

e, tenuto conto dei valori stimati per le costanti w_i , il parametro q_0 può essere espresso anche nella forma espansa

$$q_0 = \frac{1}{2} (\Omega_m)_0 + (\Omega_r)_0 - (\Omega_\Lambda)_0 \quad (52)$$

alla quale si farà riferimento nel seguito.

6 Il Modello Cosmologico Standard

Per Modello Cosmologico Standard o Modello di Concordanza (brevemente: Modello Standard) si intende una serie di valori dei parametri cosmologici da utilizzare nelle equazioni FLRW per ottenere risultati in accordo con le più recenti osservazioni astronomiche.

Nel Modello Standard, i valori attribuiti ai principali parametri sono:

- costante di curvatura: $k = 0$;
- costante di Hubble: $H_0 = 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$;
- temperatura attuale della radiazione cosmologica di fondo: $T_0 = 2,7255 \text{ K}$;

mentre su base 1, ovvero 100%, la composizione attuale dell'universo (sintetizzata graficamente nella Fig. 7) è:

- materia luminosa: $(\Omega)_{ml} = 0,048 = 4,8\%$;
- materia oscura: $(\Omega)_{md} = 0,262 = 26,2\%$;
- totale materia: $(\Omega_m)_0 = (\Omega)_{ml} + (\Omega)_{md} = 0,31 = 31,0\%$
- energia oscura: $(\Omega_\Lambda)_0 = 0,69 = 69,0\%$;
- fotoni: $(\Omega)_{rf} = 5,35 \cdot 10^{-5} = 0,00535\%$;
- neutrini: $(\Omega)_{rn} = 3,65 \cdot 10^{-5} = 0,00365\%$;
- totale particelle che si muovono alla velocità della luce: $(\Omega_r)_0 = (\Omega)_{rf} + (\Omega)_{rn} = 9,0 \cdot 10^{-5} = 0,009\%$ (componente di solito trascurata).

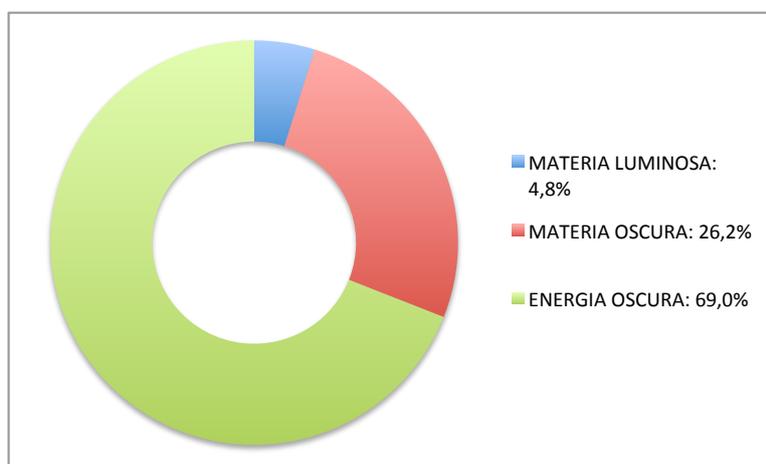


Figura 7: Composizione attuale dell'universo.

I tempi cosmici più significativi sono:

- uguaglianza dei contenuti radiazione-materia ($\Omega_r = \Omega_m = 50\%$): 50.000 anni dopo il Big Bang, in corrispondenza al fattore di scala $a_{rm} = 2,9 \cdot 10^{-4}$;
- uguaglianza dei contenuti materia-energia oscura ($\Omega_m = \Omega_\Lambda \cong 50\%$ in quanto Ω_r era già trascurabile): 10,2 miliardi di anni dopo il Big Bang, in corrispondenza al fattore di scala $a_{m\Lambda} = 0,77$;
- universo attuale: 13,7 miliardi di anni dopo il Big Bang, in corrispondenza al fattore di scala $a_0 = 1$.

(Nelle cronologie, i tempi misurati a partire dal Big Bang sono definiti “tempi cosmici”, mentre i tempi misurati “guardando indietro” a partire dall'epoca attuale sono definiti “tempi di lookback”.)

A commento dei dati precedenti si può osservare, ancora una volta, che nel Modello Standard la componente “radiazione” include sia i fotoni sia i neutrini, ovvero tutte le particelle non dotate di massa che si muovono alla velocità della luce e, di conseguenza, interagiscono allo stesso modo con la gravitazione. Ovviamente il comportamento fisico è molto diverso: i neutrini interagiscono raramente con la materia e sono talmente difficili da rilevare che, spesso, sono definiti “materia oscura calda” paragonandoli, sotto diversi aspetti, alla “materia oscura fredda” che è formata da particelle non relativistiche. I fotoni, invece, sono i componenti corpuscolari delle radiazioni elettromagnetiche e, come tali, possono essere emessi ed assorbiti dagli atomi. D'altra parte va rilevato che, nella visione semplificata della radiazione cosmica di fondo descritta nel Paragrafo 9.1, i

fotoni attualmente presenti nell'universo sono tutti e soli quelli generati durante il Big Bang e liberati nel momento in cui l'universo da opaco è diventato trasparente.

Infine va notata un'altra semplificazione: assumere $k = 0$, ovvero un universo perfettamente piano, ha comportato la necessità di "arrotondare" le densità delle diverse componenti in modo da avere $\Omega_0 = 1$ per la loro somma. In realtà, senza gli arrotondamenti si sarebbe avuto:

$$(\Omega_m)_0 + (\Omega_r)_0 + (\Omega_\Lambda)_0 = 1,0002 \pm 0,0026$$

ovvero una differenza trascurabile rispetto all'incertezza nella determinazione della costante cosmologica e, certamente, non tale da giustificare l'abbandono dell'ipotesi di universo piano fondata, come vedremo nel Paragrafo 9.2, su solide basi teoriche.

A conclusione si può dire anche che la cronologia degli eventi più importanti dimostra come la composizione dell'universo cambi continuamente. Nei primissimi istanti la componente Ω_r era dominante mentre, negli ultimi 3,5 miliardi di anni, l'energia oscura è passata dall'uguaglianza al raddoppio del contenuto rispetto alla materia. Curiosamente, dal Modello Standard emerge, quindi, il fatto che la composizione attuale dell'universo, illustrata nella Fig. 7, mostra una nettissima prevalenza di energia oscura e di materia oscura, ovvero dei componenti su cui meno si sa.

6.1 Calcolo della costante cosmologica

Dalla definizione della densità adimensionale di energia oscura si ha:

$$(\Omega_\Lambda)_0 = \frac{(\rho_\Lambda)_0}{(\rho_{cr})_0} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \frac{8\pi G}{3H_0^2} \quad (53)$$

ovvero

$$\Lambda = \frac{3H_0^2}{c^2} (\Omega_\Lambda)_0 \quad (54)$$

A questo punto basta sostituire nella (54) i valori numerici suggeriti dal Modello Standard tenendo conto dei fattori di conversione: $1 \text{ pc} = 3,09 \cdot 10^{13} \text{ km}$ e $1 \text{ Mpc} = 3,09 \cdot 10^{19} \text{ km}$, in modo da esprimere il parametro di Hubble in unità coerenti:

$$H_0 = 68 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = \frac{68}{3,09 \cdot 10^{19}} = 22,01 \cdot 10^{-19} \frac{1}{\text{s}}$$

ed arrivare al risultato voluto:

$$\Lambda = \frac{3(22,01 \cdot 10^{-19})^2}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1,11 \cdot 10^{-52} \frac{1}{\text{m}^2}$$

6.2 Calcolo di a_{rm}

Dalle rispettive definizioni si ha

$$\Omega_r = \frac{(\Omega_r)_0}{a^4} = \frac{0,00009}{a^4} \quad \text{e} \quad \Omega_m = \frac{(\Omega_m)_0}{a^3} = \frac{0,31}{a^3}$$

e, di conseguenza risulta $\Omega_r = \Omega_m$ in corrispondenza al fattore di scala

$$a = a_{rm} = \frac{0,00009}{0,31} = 0,00029$$

6.3 Calcolo di $a_{m\Lambda}$

Dalle rispettive definizioni si ha

$$\Omega_m = \frac{(\Omega_m)_0}{a^3} = \frac{0,31}{a^3} \quad \text{e} \quad \Omega_\Lambda = (\Omega_\Lambda)_0 = 0,69$$

e, di conseguenza risulta $\Omega_m = \Omega_\Lambda$ in corrispondenza al fattore di scala

$$a^3 = \frac{0,31}{0,69} \quad \Rightarrow \quad a = a_{m\Lambda} = 0,76589 \cong 0,77$$

6.4 Calcolo del parametro di decelerazione

Sostituendo nella relazione (52) i valori numerici ricavati dal Modello Standard si ha:

$$q_0 = \frac{1}{2}(\Omega_m)_0 + (\Omega_r)_0 - (\Omega_\Lambda)_0 = \frac{1}{2}0,31 + 0 - 0,69 = -0,535$$

Pertanto, secondo il Modello Standard, il parametro di decelerazione attuale

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}}{aH_0^2}$$

è negativo e, di conseguenza, l'espansione dell'universo attuale sta accelerando ($\ddot{a} > 0$). Naturalmente, un tale risultato è valido solo se vale il Modello Standard (e, di questa validazione ci si occuperà, in particolare, nel Paragrafo 8.4).

Fin da adesso, comunque, si può osservare che la scoperta del fatto che l'universo accelera è matematicamente "robusta" perché già con $(\Omega_\Lambda)_0 > 0,5(\Omega_m)_0 = 0,155$ sarebbe risultato: $q_0 < 0$, ovvero si avrebbe avuto un universo attualmente in espansione.

6.5 Passaggio da decelerazione ad accelerazione

Il passaggio da decelerazione ad accelerazione ha avuto luogo quando si è azzerato il parametro q . Per avere una versione dipendente dal tempo del parametro di decelerazione si può dividere membro a membro la (49), qui riscritta per comodità:

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4}{3}\pi G \sum_{i=1}^3 \rho_i (1 + 3w_i)$$

per la (30) a destra, qui riscritta ancora per comodità:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Si ottiene così:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} (1 + 3w_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Omega_i (1 + 3w_i)$$

e, di conseguenza, si è avuto $q = 0$ quando si è verificata la condizione:

$$\frac{1}{2}\Omega - \Omega_\Lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(\Omega_m)_0}{a^3} = (\Omega_\Lambda)_0 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{2} \frac{0,31}{0,69} = 0,608 \Rightarrow a = 0,645$$

Tale evento, si è verificato in corrispondenza con il fattore di scala 0,645, circa 6,13 miliardi di anni fa. Il calcolo è in buon accordo qualitativo con i risultati di Figura 8, raccolti dalla ACS (Advanced Camera for Surveys) a bordo del satellite Hubble.

7 Soluzione delle equazioni di Friedmann

Si è già osservato che, nella concezione originale, risolvere le equazioni di Friedmann significa trovare l'andamento nel tempo del fattore di scala $a(t)$, ovvero del redshift scritto nella forma $z = [1/a(t) - 1]$ con $a(t_0) = 1$.

In realtà le soluzioni analitiche, alle quali (probabilmente) Friedmann si riferiva, sono possibili unicamente per un universo ad un solo componente (ovvero, in alternativa: radiazione, o materia o costante cosmologica). Nel caso di universo con due, o più componenti, infatti, le integrazioni analitiche esatte non sono più possibili e, di conseguenza, è necessario ricorrere a procedure di integrazione numerica che, per loro natura, non sono generali e, di conseguenza, vengono limitate a situazioni di particolare interesse cosmologico.

Qualunque sia la procedura applicata, però, i punti di partenza sono quelli illustrati nel seguito. In primo luogo il parametro di Hubble viene espresso in base ad una delle

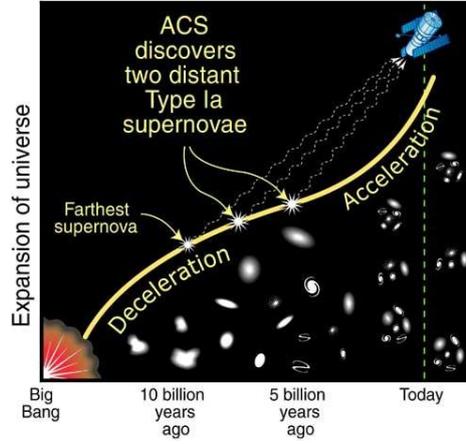


Figura 8: Transizione tra decelerazione e accelerazione dell'universo secondo i dati della ACS (Advanced Camera for Surveys) a bordo del satellite Hubble

due relazioni (47) o (48) scritte nelle forme

$$H(a) = H_0 \left[\frac{(\Omega_m)_0}{a^3} + \frac{(\Omega_r)_0}{a^4} + (\Omega_\Lambda)_0 \right]^{1/2} \quad (55)$$

e

$$H(z) = H_0 \left[(\Omega_m)_0(1+z)^3 + (\Omega_r)_0(1+z)^4 + (\Omega_\Lambda)_0 \right]^{1/2} \quad (56)$$

Successivamente, a partire dalle definizioni del parametro di Hubble nelle due versioni dipendenti dal tempo, si opera uno dei due cambiamenti di variabile possibili

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad \text{o} \quad H(t) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} = H(z) \quad (57)$$

in modo da separare le variabili ottenendo, rispettivamente

$$dt = \frac{da}{aH(a)} \quad \text{o} \quad dt = -\frac{1}{(1+z)H(z)} dz \quad (58)$$

Nel seguito, si illustreranno prima le soluzioni analitiche classiche proposte in letteratura per gli universi a un solo componente. Dopo, si considereranno alcune soluzioni numeriche di particolare interesse cosmologico valide per un universo a due componenti: materia e costante cosmologica presi nelle proporzioni suggerite dal Modello Cosmologico Standard. Le soluzioni numeriche, tuttavia, saranno presentate insieme a soluzioni analitiche di confronto, valide per universi con un solo componente. Tali soluzioni, infatti, delimitano l'intervallo di possibile variazione delle soluzioni numeriche nell'ipotesi di composizione dell'universo diversa da quella proposta dal Modello Cosmologico Standard.

7.1 Soluzioni analitiche classiche

Nel titolo ci si riferisce alle soluzioni analitiche, valide per universi monodimensionali, che sono volte ad esprimere il fattore di scala in funzione del tempo. Tali soluzioni riguardano l'universo composto di sola materia, che era il modello accettato al tempo della cosmologia di Einstein; l'universo composto di sola radiazione, che era il modello accettato al tempo di Lemaître per simulare il periodo immediatamente successivo al Big Bang; e l'universo composto di sola energia oscura, che potrebbe essere l'universo futuro se l'espansione continuasse ad accelerare. (In realtà, come discusso nel Paragrafo 9.2, un universo condizionato dalla sola costante cosmologica potrebbe essere già apparso sulla scena nei primi istanti dopo il Big Bang).

7.1.1 Universo composto di sola materia

Nel caso di universo composto di sola materia si ha: $(\Omega_m)_0 = 1$, e $(\Omega_r)_0 = (\Omega_\Lambda)_0 = 0$ e, dalle relazioni (55) e (58) a sinistra, si ottiene

$$\int dt = \int \frac{da}{aH(a)} \Rightarrow H_0 t = \int a^{1/2} da = \frac{2}{3} a^{3/2} \quad (59)$$

Passando all'integrazione sull'intero intervallo temporale si ha

$$H_0 t \Big|_0^{t_0} = \frac{2}{3} a^{3/2} \Big|_0^1 \Rightarrow H_0 t_0 = \frac{2}{3} \quad (60)$$

e, quindi, l'età di un universo composto di sola materia è:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (61)$$

Alternativamente, procedendo all'integrazione parziale da t a t_0 e da $a(t)$ ad 1, si ottiene

$$H_0 t \Big|_t^{t_0} = \frac{2}{3} a^{3/2} \Big|_{a(t)}^1 \Rightarrow H_0 (t_0 - t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} a(t)^{3/2} \quad (62)$$

e, tenendo conto della (61), dopo alcuni passaggi algebrici si arriva alla relazione che esprime il fattore di scala in funzione del tempo

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{3/2} \quad (63)$$

7.1.2 Universo composto di sola radiazione

Nel caso di universo composto di sola radiazione si ha: $(\Omega_m)_0 = (\Omega_\Lambda)_0 = 0$, e $(\Omega_r)_0 = 1$. Procedendo in analogia al caso precedente, si ottiene

$$H_0 t = \int a da = \frac{1}{2} a^2 \quad (64)$$

Passando all'integrazione sull'intero intervallo temporale si ha

$$H_0 t \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{2} a^2 \Big|_0^1 \Rightarrow H_0 t_0 = \frac{1}{2} \quad (65)$$

e, quindi, l'età di un universo composto di sola radiazione è:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \quad (66)$$

Alternativamente, procedendo all'integrazione parziale da t a t_0 e da $a(t)$ ad 1, si ottiene

$$H_0 t \Big|_t^{t_0} = \frac{1}{2} a^2 \Big|_{a(t)}^1 \Rightarrow H_0(t_0 - t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} a(t)^2 \quad (67)$$

e, tenendo conto della (66), dopo alcuni passaggi algebrici si arriva alla relazione che esprime il fattore di scala in funzione del tempo

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \quad (68)$$

7.1.3 Universo composto di sola energia oscura

Nel caso di universo con la costante cosmologica come unico componente si ha: $(\Omega_m)_0 = (\Omega_r)_0 = 1$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 1$. Procedendo in analogia ai casi precedenti, si ottiene

$$H_0 t = \int \frac{da}{a} \quad (69)$$

Passando all'integrazione parziale da t_0 a t e da 1 ad $a(t)$ si ha

$$H_0 t \Big|_{t_0}^t = \ln |a| \Big|_1^{a(t)} \Rightarrow H_0(t - t_0) = \ln |a(t)| \quad (70)$$

e si arriva alla relazione che esprime il fattore di scala in funzione del tempo

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} \quad (71)$$

Tale relazione ci informa che un universo composto di sola energia oscura si espande nel tempo esponenzialmente.

7.2 Il “tempo di lookback”

Come si è già osservato, si definisce “tempo di lookback” il tempo misurato “guardando indietro” a partire dall’epoca attuale, mentre si definisce “tempo cosmico” il tempo misurato a partire dal Big Bang. Ovviamente, per ogni evento, la somma di “tempo di lookback” e “tempo cosmico” ha per risultato l’età dell’universo attuale.

Ciò premesso si può osservare che in questa, e nelle altre soluzioni numeriche proposte nel seguito, si preferisce utilizzare come variabile indipendente il redshift z al posto del fattore di scala a in quanto z , a differenza di a , è suscettibile di valutazione diretta. In questo caso, la relazione (58) a destra, riscritta per comodità, fornisce

$$dt = -\frac{1}{(1+z)H(z)}dz$$

dove, sostituendo al denominatore l’espressione (56), si ottiene

$$dt = -\frac{1}{H_0} \frac{dz}{(1+z) [(\Omega_m)_0(1+z)^3 + (\Omega_r)_0(1+z)^4 + (\Omega_\Lambda)_0]^{1/2}} \quad (72)$$

Per determinare il tempo di lookback dell’istante t_e nel quale è stato emesso un segnale con redshift z , si possono integrare i due membri della (72), rispettivamente da t_e al tempo presente t_0 e da z a zero, essendo $z(t_0) = 0$. Si ottiene così

$$\int_{t_e}^{t_0} dt = -\frac{1}{H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{(1+z') [(\Omega_m)_0(1+z')^3 + (\Omega_r)_0(1+z')^4 + (\Omega_\Lambda)_0]^{1/2}} \quad (73)$$

dove si distingue tra variabile di integrazione z' e limite superiore di integrazione z . La (73) è una relazione integrabile numericamente con relativa facilità, soprattutto se si trascura del tutto il contributo della radiazione [essendo, come si è già ricordato: $(\Omega_r)_0 \cong 0,00009$]. Per arrivare a valori numerici attendibili, si può fare riferimento al Modello Standard ponendo: $(\Omega_m)_0 = 0,31$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0,69$, in modo da ottenere l’andamento del tempo di lookback riportato a tratto continuo nella Fig. 9. Può essere interessante notare nella curva così ottenuta che, al tendere di z all’infinito, il tempo di lookback ($t_0 - t_e$) cresce sempre più lentamente sino a ritrovare il valore limite di 13,7 miliardi di anni, anticipato nel Modello Standard stesso.

Per confronto, nella Figura 9 sono riportati anche gli andamenti del tempo di lookback che si possono ottenere integrando analiticamente la relazione (73) nei casi di dominio della costante cosmologica (curva a punto e tratto) e di dominio della materia (curva a semplice tratteggio). Per $(\Omega_\Lambda)_0 = 1$ e $(\Omega_m)_0 = 0$ si ha

$$t_0 - t_e = -\frac{1}{H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{1+z} = \frac{1}{H_0} \ln(1+z') \Big|_0^z = \frac{1}{H_0} \ln(1+z) \quad (74)$$

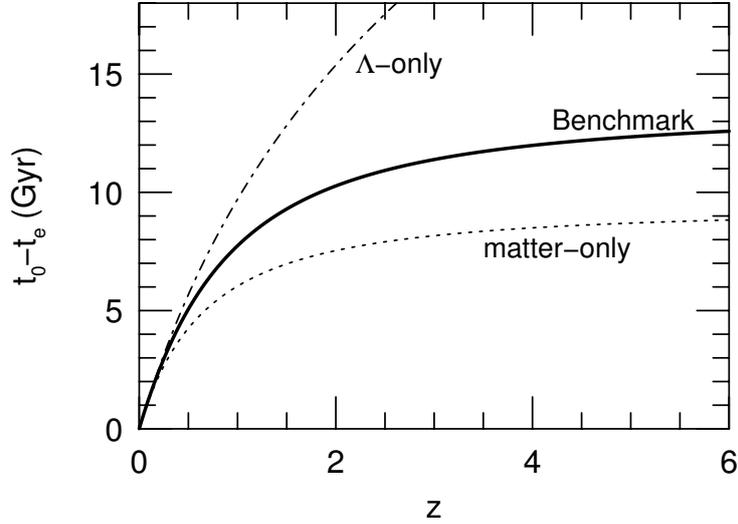


Figura 9: Tempo di lookback ($t_0 - t_e$) in funzione del redshift z . Curva continua: Modello Standard; curva a punto e tratto: universo dominato dalla costante cosmologica, e curva a semplice tratteggio: universo dominato dalla materia [B. Ryden, *Introduction to Cosmology*].

mentre, nel caso di dominio della materia con: $(\Omega_m)_0 = 1$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0$, si ha

$$t_0 - t_e = -\frac{1}{H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{(1+z')^{5/2}} = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3(1+z')^{3/2}} \Big|_z^0 = \frac{2}{3H_0} \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right] \quad (75)$$

In quest'ultimo caso si può notare che, al tendere di z all'infinito, il tempo di lookback tende a $2/(3H_0)$ ritrovando così il valore dell'età di un universo composto di sola materia già calcolata al Paragrafo 7.1.1.

7.3 La distanza propria

Non essendoci possibilità di equivoco, fino a questo paragrafo si sono alleggerite le notazioni utilizzando il simbolo D , anziché D_p , per indicare la “distanza propria” di un corpo celeste, cioè la distanza misurata in un sistema di riferimento nel quale la Terra e il corpo celeste, necessariamente vicini, sono praticamente “a riposo” una rispetto all'altro.

All'aumentare del percorso, tuttavia, non vale più il legame lineare espresso dalla (19) tra la distanza e il tempo di viaggio del segnale emesso dal corpo celeste. Infatti, il segnale è emesso dal corpo celeste E all'istante t_e ed è ricevuto sulla Terra dall'osservatore in O all'istante t_0 ma, a causa della espansione dell'universo, il percorso si è

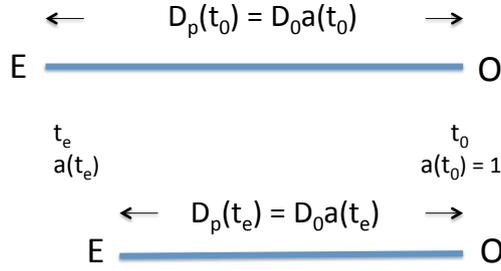


Figura 10: Distanza propria D_p al momento dell'osservazione (sopra) e al momento dell'emissione (sotto).

allungato durante il viaggio. Di conseguenza, la distanza propria può solo essere pensata come “fotografia” del “binario” geodetico seguito dalla luce dal punto di partenza-emissione E al punto di arrivo-osservazione O. [A questo proposito, si può tener presente che, in un universo omogeneo, isotropo ed a curvatura nulla ($k = 0$) come il nostro, le geodetiche sono linee rette poiché, come si è detto, vale la geometria euclidea].

La situazione è schematizzata nella Figura 10 dove sono rappresentate: sopra, la fotografia della distanza propria $D_p(t_0)$ all'arrivo del segnale in O e, sotto, la fotografia della distanza propria $D_p(t_e)$ al momento dell'emissione del segnale in E. Come si vede, l'allungamento del percorso nell'intervallo di tempo che va da t_e (emissione) a t_0 (ricezione) è quantificabile in base alla (9). Essendo:

$$D_p(t_0) = a(t_0)D_0 \quad \text{e} \quad D_p(t_e) = a(t_e)D_0 \quad (76)$$

si ha, infatti

$$D_p(t_0) = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} D_p(t_e) = \frac{1}{a(t_e)} D_p(t_e) \quad (77)$$

Si può, quindi, dire che se $D_p(t_e)$ è la distanza propria al momento dell'emissione, la distanza propria $D_p(t_0)$ al momento dell'osservazione è più grande a causa del passaggio del fattore di scala dell'universo da $a(t_e) < 1$ ad $a(t_0) = 1$.

Dal punto di vista delle possibilità di calcolo, purtroppo, la definizione concettuale precedente non basta, e si deve ricominciare partendo dai fondamenti. Innanzi tutto, si può constatare che legami lineari sussistono ancora nei percorsi elementari infinitesimi dD compiuti dalla luce negli intervalli di tempo infinitesimi:

$$dt = \frac{dD}{c} \quad (78)$$

I percorsi dD , però, si espandono durante i tempi $(t_0 - t)$ che mancano all'arrivo, in quanto i fattori di scala passano da $a(t) < 1$ ad $a(t_0) = 1$. Di conseguenza, al momento

dell'arrivo si ha

$$dD_p = \frac{a(t_0)}{a(t)} dD = \frac{1}{a(t)} dD = c \frac{dt}{a(t)} = c(1+z)dt \quad (79)$$

dove si può pensare a dD_p come ad un elemento infinitesimo del “binario” geodetico seguito dalla luce, ovvero ad un elemento infinitesimo della distanza propria. D'altra parte, in analogia al Paragrafo 7.2, se si utilizza come variabile indipendente il redshift z conviene ricorrere anche alla relazione (58) a destra, riscritta per comodità, che fornisce

$$dt = -\frac{1}{(1+z)H(z)} dz$$

Pertanto, sostituendo tale espressione nella (79), si ottiene

$$dD_p = -c \frac{dz}{H(z)} \quad (80)$$

ed, essendo $z(t_0) = 0$, risulta

$$D_p(t_0) = -c \int_{z(t_e)}^0 \frac{dz}{H(z)} = c \int_0^{z(t_e)} \frac{dz}{H(z)} \quad (81)$$

A questo punto, si può tenere conto della definizione (56) di $H(z)$ e interpretare $z(t_e)$ come limite di integrazione variabile assumendo $z(t_e) = z$. Si arriva così alla espressione

$$\frac{D_p(t_0)}{c/H_0} = \frac{D_p(t_0)}{D_H} = \int_0^z \frac{dz'}{[(\Omega_m)_0(1+z')^3 + (\Omega_r)_0(1+z')^4 + (\Omega_\Lambda)_0]^{1/2}} \quad (82)$$

dove, al solito, si è distinto tra variabile di integrazione z' e limite di integrazione z .

La (82) è una relazione adimensionale integrabile numericamente con relativa facilità, soprattutto se si trascura del tutto il contributo della radiazione [essendo, come si è già ricordato: $(\Omega_r)_0 \cong 0,00009$]. Per arrivare a valori numerici attendibili, si può fare riferimento ancora al Modello Standard assumendo: $(\Omega_m)_0 = 0,31$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0,69$ in modo da ottenere l'andamento della distanza propria al tempo dell'osservazione t_0 , riportato a tratto continuo nella Fig. 11 a sinistra.

Si noti che, nella rappresentazione grafica dei risultati, il riferimento alla distanza propria al momento della ricezione del segnale, viene adimensionalizzato rispetto alla distanza di Hubble ($D_H = c/H_0 \cong 14,4$ miliardi di anni luce), definendo

$$\check{D}_p(t_0) = \frac{D_p(t_0)}{D_H} \quad (83)$$

Ciò premesso, può essere interessante notare che, al tendere di z all'infinito, la distanza propria calcolata con il Modello Standard cresce sempre più lentamente sino ad arrivare al valore limite anticipato al Paragrafo 4.2:

$$\check{D}_p(t_0)_{z \rightarrow \infty} = 3,2 \Rightarrow D_p(t_0) = 3,2 \cdot D_H = 3,2 \cdot 14,4 \cong 46,1 \text{ miliardi di anni luce}$$

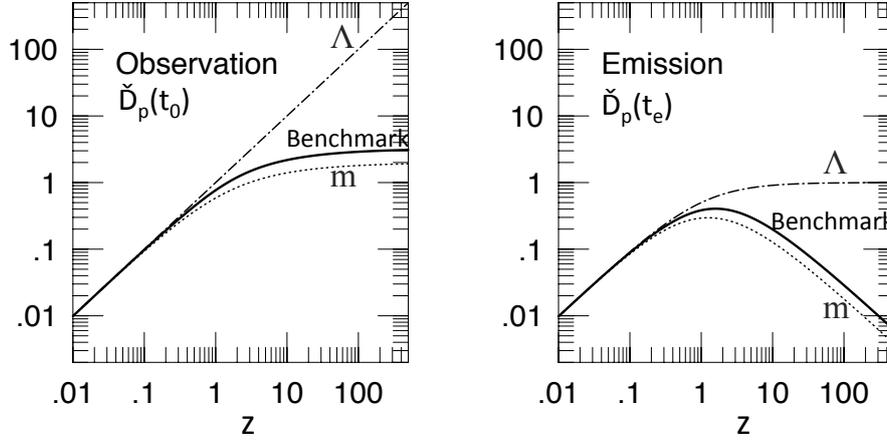


Figura 11: Distanza propria adimensionale di un corpo celeste in funzione del redshift. A sinistra: distanza propria al tempo dell'osservazione; a destra distanza propria al tempo dell'emissione. Curve continue: Modello Standard con $(\Omega_m)_0 = 0,31$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0,69$; curve a punto e tratto: universo dominato dalla costante cosmologica con: $(\Omega_\Lambda)_0 = 1$ e $(\Omega_m)_0 = 0$; curve a semplice tratteggio: universo dominato dalla materia con $(\Omega_\Lambda)_0 = 0$ e $(\Omega_m)_0 = 1$ [B. Ryden, *Introduction to Cosmology, modificata*].

che è la distanza massima osservabile attualmente, ovvero l'**orizzonte dell'universo**.

Per confronto, nella Figura 11 a sinistra sono tracciati anche gli andamenti della distanza propria che si ottengono assumendo le coppie di valori: $(\Omega_\Lambda)_0 = 1$ e $(\Omega_m)_0 = 0$ nella curva a punto e tratto (sola energia oscura), e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0$ e $(\Omega_m)_0 = 1$ nella curva a semplice tratteggio (sola materia). Nel caso di sola energia oscura si ha

$$\check{D}_p(t_0) = \int_0^z dz = z \quad (84)$$

mentre, nel caso di sola materia si ha

$$\check{D}_p(t_0) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^{3/2}} = -\frac{2}{(1+z')^{1/2}} \Big|_0^z = 2 \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{1/2}} \right] \quad (85)$$

Nel caso di sola materia, quindi, al tendere di z all'infinito, la distanza propria cresce sempre più lentamente sino ad arrivare al valore limite $\check{D}_p(t_0) = 2$.

Per completezza, si può facilmente calcolare anche l'andamento della distanza propria al tempo dell'emissione t_e . Come si è già osservato, la relazione tra le due distanze dipende dall'espansione dell'universo intervenuta da t_e a t_0 , ovvero dalla (77). In termini di redshift, quindi, si ha

$$\check{D}_p(t_e) = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \check{D}_p(t_0) = \frac{a(t_e)}{1} \check{D}_p(t_0) = \frac{1}{1+z_e} \check{D}_p(t_0) \quad (86)$$

Di conseguenza, le curve rappresentative delle distanze proprie al momento dell'emissione $\check{D}_p(t_e)$, riportate nella Figura 11 a destra, si ottengono dalle curve omologhe delle distanze proprie al momento dell'osservazione $\check{D}_p(t_0)$ dividendo, punto per punto, per la quantità $(1+z)$. [In analogia al caso della (82), infatti, z_e può essere interpretato come limite di integrazione variabile, assumendo $z(t_e) = z$].

Analiticamente, ciò si esprime scrivendo

$$\begin{aligned}\check{D}_p(t_e) &= \frac{1}{1+z} \check{D}_p(t_0) \\ &= \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{[(\Omega_m)_0(1+z')^3 + (\Omega_r)_0(1+z')^4 + (\Omega_\Lambda)_0]^{1/2}}\end{aligned}\quad (87)$$

nel caso generale;

$$\check{D}_p(t_e) = \frac{1}{1+z} \check{D}_p(t_0) = \frac{1}{1+z} z \quad (88)$$

nel caso di sola energia oscura, e

$$\check{D}_p(t_e) = \frac{1}{1+z} \check{D}_p(t_0) = \frac{2}{1+z} \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{1/2}} \right] \quad (89)$$

nel caso di sola materia.

In questo modo si vede chiaramente come, al tendere di z all'infinito, le curve $\check{D}_p(t_e)$ rappresentative del Modello Standard e dell'universo composto di sola materia tendano a zero mentre la curva rappresentativa dell'universo composto di sola energia oscura si avvicini sempre più a 1.

A commento finale dei risultati di entrambe le Figure 11, si può dire che la presenza della energia oscura unita alla materia esercita una influenza sui risultati molto minore dell'eliminazione completa della materia a favore della sola energia oscura.

8 Le osservazioni cosmologiche

Come si può intuire da quanto discusso sinora, nelle osservazioni cosmologiche si preferisce operare su radiazioni elettromagnetiche in generale (anche se, per semplicità, qui ci si è sempre riferiti alla sola sottoclasse delle radiazioni luminose). Inoltre, va detto subito che le misure dirette sulle radiazioni luminose sono relativamente agevoli unicamente per quel che riguarda il redshift.

Per quel che riguarda le distanze proprie, invece, le misura dirette sono possibili solo se la Terra e il corpo celeste si possono considerare "a riposo" sullo stesso sistema di riferimento. (In pratica, la Terra e il corpo celeste si possono considerare "fermi" una rispetto all'altro solo per valori del redshift molto piccoli: $z < 0,02$).

Quando, all'aumentare delle distanze non è più possibile trascurare l'espansione dell'universo, si deve pensare ad un cambiamento sostanziale delle tecniche di misura

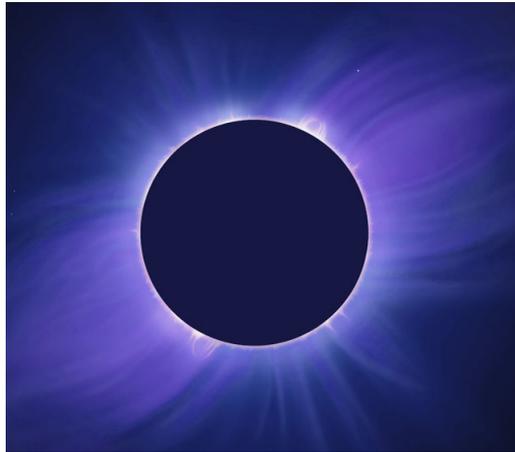


Figura 12: Corona solare fotografata durante una eclissi totale.

e, tra le possibili alternative a disposizione, quella favorita attualmente è la misura della distanza di luminosità (descritta nel Paragrafo 8.3).

8.1 Misura del redshift cosmologico

Per la maggior parte delle stelle il redshift viene valutato facendo riferimento alle linee di assorbimento nello spettro di emissione, cioè alle linee di Fraunhofer prodotte dagli elementi chimici che si trovano nelle loro regioni più fredde (che sono quelle esterne).

Nel caso del Sole, ad esempio, la regione più fredda è la corona che viene tradizionalmente fotografata durante le eclissi totali ottenendo immagini del tipo di quella riportata nella Fig. 12. (A questo proposito è interessante notare che la Luna ha un diametro circa 400 volte più piccolo di quello del Sole, ma è anche 400 volte più vicina. I due effetti si compensano quasi perfettamente durante le eclissi totali, trasformando la Luna in uno schermo molto fotogenico).

Gli elementi chimici presenti nelle regioni esterne fredde delle stelle assorbono a bande i fotoni incidenti e li riemettono in direzioni casuali, determinando una serie di linee scure nello spettro luminoso. (Nella corona solare, ad esempio, sono presenti quelle di idrogeno, elio, calcio, magnesio e sodio). Poiché ogni elemento produce linee scure in posizioni ben note, con l'analisi spettroscopica è possibile identificare la composizione chimica degli strati superficiali, ma anche valutare il redshift. Basta, infatti, misurare gli spostamenti delle bande provenienti da corpi lontani rispetto alle bande prodotte da corpi vicini (che si muovono con velocità trascurabili rispetto alla Terra).

La procedura è abbastanza agevole, come si può intuire dalla Fig. 13 nella quale viene confrontato lo spettro di assorbimento tipico di una stella molto vicina (e, di

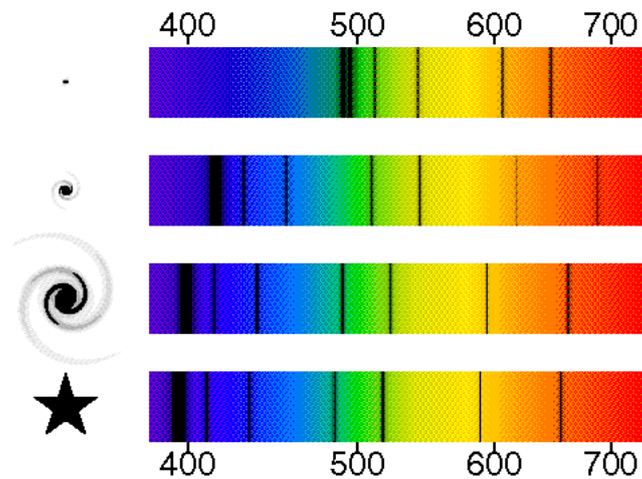


Figura 13: Misura del redshift attraverso l'analisi delle linee di assorbimento negli spettri di emissione di stelle e galassie. Lo spostamento progressivo con la distanza della banda principale da 393 a 496 è ben evidente (la scala è in nanometri) [Ned Wright, UCLA].

conseguenza, praticamente ferma rispetto alla Terra) con quelli (da sotto a sopra) di tre galassie che si trovano a distanze crescenti. Nel caso di figura, ad esempio, risulta evidente lo spostamento progressivo, con la distanza, della banda principale di assorbimento: da 393 nm (nanometri, ovvero milionesimi di millimetro) per la stella vicina, fino a 496 nm per la galassia più lontana. Con tali valori il redshift massimo risulta pari a:

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t)}{\lambda(t)} = \frac{496 - 393}{393} = 0,26$$

(in realtà: $z = 0,25$ per la media delle bande di assorbimento) mentre, evidentemente, le galassie più vicine presentano redshift in progressiva diminuzione: $z = 0,05$ per la distanza media e $z = 0,01$ per la distanza minima. (La stella in grande è considerata ferma e, quindi, a redshift zero).

8.2 Misura della distanza propria

Nonostante l'espansione dell'universo, si possono considerare "praticamente" a riposo le stelle che distano dalla Terra non più di qualche centinaio di parsec. Infatti, con $D = 100$ pc, ovvero 0,0001 Mpc, dalla legge di Hubble si ottiene una velocità di allontanamento: $v = 68 \cdot 0,0001 \cong 0,007$ km/s, decisamente bassa in rapporto alla velocità della luce. Entro distanze di qualche centinaio di anni luce (100 pc $\cong 326$ anni luce) sono, quindi, possibili misure dirette delle distanze proprie che vengono effettuate:

- entro il sistema solare, con tecniche radar basate sull’invio e la ricezione di segnali a microonde utilizzabili, appunto, per distanze inferiori a 1 AU (Astronomic Unit, ovvero unità astronomica, è la distanza media Terra-Sole pari a circa 149,6 milioni di chilometri);
- fino al limite superiore per le misure dirette (pari, come si è detto, a qualche centinaio di anni luce) con tecniche basate sulla valutazione del “parallasse”.

8.2.1 Parallasse

In astronomia, con parallasse si intende l’angolo di spostamento apparente p di una stella nel cielo, valutato in gradi come nella Fig. 14 in alto. Per tale valutazione occorrono due misure effettuate a distanza di sei mesi una dall’altra (ovvero da due posizioni orbitali distanti tra loro 2 AU). Come dimostrato dalle Fig. 14 al centro e in basso, l’angolo di parallasse è inversamente proporzionale alla distanza Terra-stella e, infatti, la relazione correntemente utilizzata nelle valutazioni è

$$D = \frac{1}{p} \text{ [pc]} \quad (90)$$

dove D è espresso in parsec e p è espresso in gradi. Quindi, con $p = 1^\circ$ si ha $D = 1$ pc, ovvero 3,26 anni luce, mentre la stella più vicina, Alfa Centauri, che presenta un parallasse $p = 0,742^\circ$, si trova ad una distanza $D = 1,35 \text{ pc} \cong 4,4$ anni luce. Inoltre, come si intuisce dalla Fig. 14 in basso, la misura comporta la valutazione di angoli sempre più piccoli man mano che la distanza cresce (ad esempio, con 100 pc si ha $p = 0,01^\circ$). Di conseguenza, la misura diventa sempre meno accurata e, insieme, diventa anche meno accettabile l’ipotesi di trascurare la velocità di allontanamento della stella.

8.3 Misura della distanza di luminosità

Come si è ripetutamente osservato, per misure su grandi distanze cosmologiche occorre adottare procedure alternative del tipo di quella qui descritta. In pratica: con tecnologie ottiche si determina prima quella che viene definita **distanza di luminosità** D_L e, successivamente, si mette in relazione la distanza D_L con la distanza virtualmente misurabile lungo il percorso geodetico, ovvero la distanza propria D_p .

Il metodo ottico di misura è reso possibile dall’esistenza di stelle molto luminose con caratteristiche di emissione note. Tali stelle vengono definite “candele standard” in quanto, come meglio illustrato al Paragrafo 8.4.1, si conosce la loro luminosità L , cioè il flusso totale emesso nel campo del visibile (che, in illuminotecnica, viene espresso in watt [W]). Nella Fig. 15 si vede che, all’aumentare della distanza, tale flusso si riparte su superfici sferiche concentriche di area crescente con il quadrato della distanza stessa.

In un punto di osservazione sulla Terra, arriva un flusso luminoso specifico ϕ (cioè un flusso per unità di superficie, espresso in illuminotecnica in watt per metro quadrato

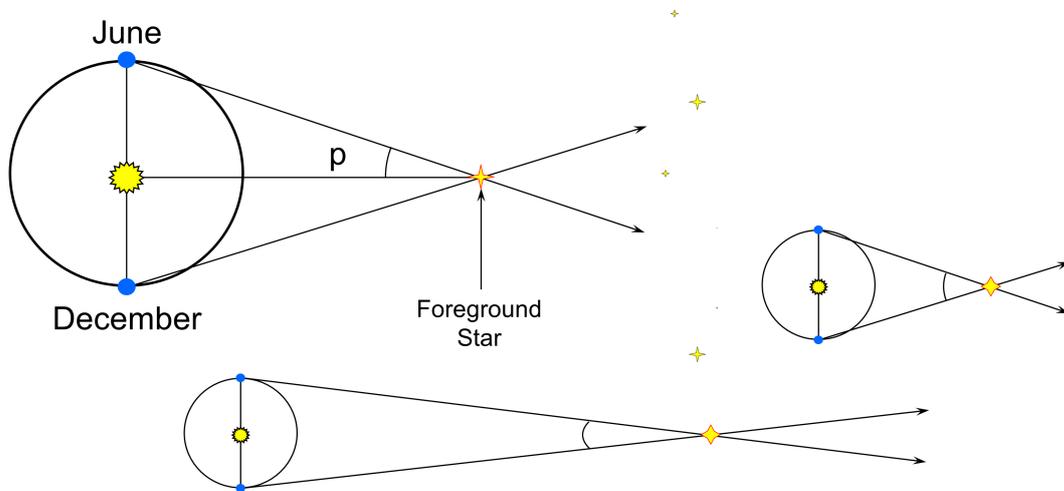


Figura 14: Definizione dell'angolo p di parallasse (in alto) e sue variazioni con la distanza (al centro e in basso) [R. Pogge, *Ohio State University*].

[W/m^2]) che, generalmente, viene misurato con strumenti estremamente sensibili chiamati **bolometri**. (Schematicamente, l'elemento sensibile di un bolometro è una lamina metallica annerita che, assorbendo le radiazioni elettromagnetiche, si riscalda. Dalla conseguente variazione di temperatura, valutata misurando la variazione della resistenza elettrica della stessa lamina, per taratura si risale all'intensità delle radiazioni).

In armonia con la Fig. 15, se la stella fosse ferma rispetto alla Terra si avrebbe:

$$\phi = \frac{L}{4\pi D_p^2} \Rightarrow D_p = \sqrt{\frac{L}{4\pi\phi}} = D_L \quad (91)$$

dove la seconda relazione definisce la distanza di luminosità

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi\phi}} \quad (92)$$

e ci informa del fatto che, nel caso di stella ferma, la distanza propria coincide con la distanza di luminosità.

Se invece, a causa dell'espansione dell'universo, la stella si allontana con velocità non trascurabile, la definizione (92) della distanza di luminosità in funzione del rapporto tra luminosità nota e flusso specifico misurato, continua a valere formalmente inalterata, mentre la prima relazione (91) tra flusso specifico e distanza propria cambia. Si ha, infatti

$$\phi = \frac{L}{4\pi D_p^2} \frac{1}{(1+z)^2} \quad (93)$$

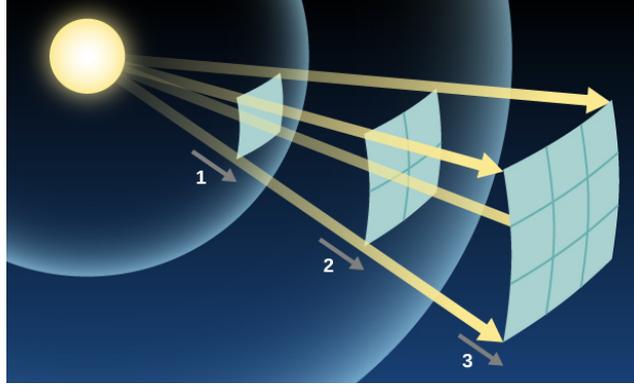


Figura 15: Diminuzione del flusso luminoso specifico con il quadrato della distanza dalla “candela standard” di luminosità nota. [Lumen Learning, Simple Book Production]

dove z è il redshift, e la presenza del fattore moltiplicativo $1/(1+z)^2$ è legata all’espansione dell’universo (come meglio si vedrà nel Paragrafo 8.3.2). Sostituendo l’espressione (93) del flusso specifico nella definizione (92) della distanza di luminosità, si ottiene

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi\phi}} = \sqrt{\frac{L}{4\pi} \frac{4\pi D_p^2 (1+z)^2}{L}} = (1+z)D_p \Rightarrow D_p = \frac{D_L}{1+z} \quad (94)$$

Pertanto, a causa del redshift, la distanza di luminosità risulta sempre maggiore della distanza propria ovvero, a causa dell’espansione dell’universo, i corpi celesti ci appaiono meno luminosi di quanto sarebbe giustificato dalla sola distanza propria alla quale si trovano. Inoltre, la relazione (94) a destra mostra chiaramente come, una volta misurata la distanza di luminosità D_L ed il redshift z , si possa risalire alla distanza propria D_p .

8.3.1 Calcolo della distanza di luminosità

La relazione (94) a sinistra mostra anche come, una volta calcolata la distanza propria D_p si possa determinare la distanza di luminosità D_L che differisce soltanto per il fattore moltiplicativo $(1+z)$. Ovviamente la stessa relazione resta valida per le rispettive espressioni adimensionali

$$\check{D}_L(t_0) = (1+z)\check{D}_p(t_0) \quad (95)$$

dove, evidentemente, si ha

$$\check{D}_L(t_0) = \frac{D_L(t_0)}{D_H}$$

con D_H distanza di Hubble definita, a sua volta, da $D_H = c/H_0$ e pari a circa 14,4 miliardi di anni.

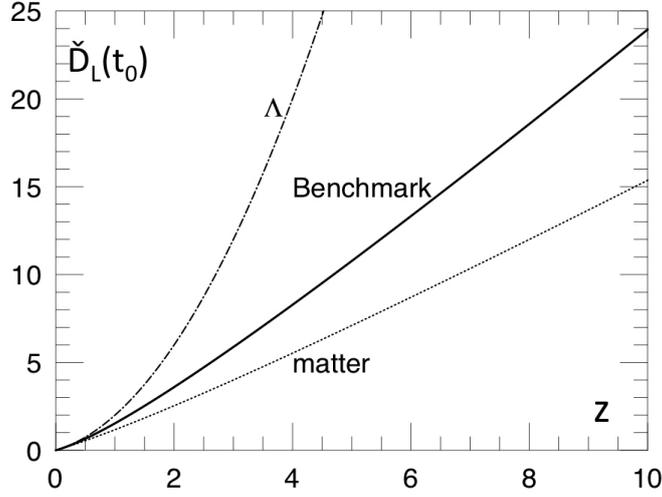


Figura 16: Distanza di luminosità adimensionale di un corpo celeste in funzione del redshift. Curva continua: Modello Standard con $(\Omega_m)_0 = 0,31$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0,69$; curva a punto e tratto: universo dominato dalla costante cosmologica con: $(\Omega_\Lambda)_0 = 1$ e $(\Omega_m)_0 = 0$; curva a semplice tratteggio: universo dominato dalla materia con $(\Omega_\Lambda)_0 = 0$ e $(\Omega_m)_0 = 1$ [B. Ryden, *Introduction to Cosmology, modificata*].

Nella Figura 16, di conseguenza, le curve rappresentative della distanza di luminosità al momento dell'osservazione $\check{D}_L(t_0)$, sono ottenibili dalle curve omologhe delle distanze proprie al momento dell'osservazione $\check{D}_p(t_0)$ moltiplicando, punto per punto, per la quantità $(1+z)$.

Ovviamente, lo stesso discorso vale per le espressioni analitiche. Nel caso generale, dalla (82) si ottiene subito

$$\begin{aligned} \check{D}_L(t_0) &= (1+z)\check{D}_p(t_0) \\ &= (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{[(\Omega_m)_0(1+z')^3 + (\Omega_r)_0(1+z')^4 + (\Omega_\Lambda)_0]^{1/2}} \end{aligned} \quad (96)$$

dove, al solito, si è distinto tra variabile di integrazione z' e limite di integrazione z .

Nel caso di sola energia oscura, dalla (84) si ha

$$\check{D}_L(t_0) = (1+z)\check{D}_p(t_0) = z(1+z) \quad (97)$$

mentre nel caso di sola materia, dalla (85) si ha

$$\check{D}_L(t_0) = (1+z)\check{D}_p(t_0) = 2(1+z) \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{1/2}} \right] \quad (98)$$

8.3.2 Flusso specifico ricevuto ed espansione dell'universo*

In un universo in espansione, il flusso luminoso specifico ricevuto viene ridotto di un fattore $(1+z)^2$ rispetto al flusso specifico emesso a causa della riduzione di energia in arrivo per unità di tempo e di superficie. Un fattore $(1+z)$ deriva dall'aumento di lunghezza d'onda, e quindi in base alla (16), dalla riduzione di frequenza della radiazione in arrivo

$$\frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_e)} = \frac{f(t_e)}{f(t_0)} = 1+z$$

Infatti, per la relazione di Planck si ha

$$E = fh$$

con $h \cong 6,63 \cdot 10^{-34}$ joule per secondo [J s] e, di conseguenza, l'energia dei fotoni è proporzionale alla frequenza. Pertanto la diminuzione di frequenza, da $f(t_e)$ al momento dell'emissione a $f(t_0)$ al momento dell'osservazione, comporta una perdita di energia per ogni fotone quantificata da $(1+z)$.

L'altro fattore $(1+z)$ deriva dal fatto che, se la frequenza diminuisce rispetto alla frequenza di emissione, l'intervallo temporale di ricezione dei fotoni aumenta e diventa più grande dell'intervallo temporale di emissione. In altre parole, nell'unità di tempo al punto di osservazione arrivano meno fotoni di quelli emessi, poiché un numero di fotoni crescente viene "sgranato" nel percorso crescente tra la stella e la Terra. Di conseguenza, si ha proprio

$$\phi = \frac{L}{4\pi D_p^2} \frac{1}{(1+z)^2}$$

come previsto dalla Eq. (93).

8.4 Validazione del Modello Standard

Il Premio Nobel per la Fisica 2011 è stato assegnato a Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess "per la scoperta dell'espansione accelerata dell'universo attraverso l'osservazione di supernove distanti". La rivoluzionaria scoperta fu annunciata, quasi contemporaneamente nel 1998, da due gruppi rivali coordinati uno da Perlmutter e l'altro da Schmidt e Riess. I due gruppi avevano studiato il comportamento delle Supernove Tipo Ia ospitate in galassie lontane e, analizzando le distanze di luminosità di queste "candele standard", avevano raggiunto la stessa conclusione: l'espansione dell'universo stava accelerando.

Per quasi un secolo si era creduto che l'espansione fosse una conseguenza del "solo" Big Bang ma, se così fosse stato, l'espansione avrebbe dovuto essere rallentata dalla gravità fino ad invertirsi diventando contrazione o, al più, a proseguire all'infinito con velocità che si avvicinava sempre più a un valore limite inferiore senza mai raggiungerlo (asintoto o se vogliamo: convergenza parallela). Al contrario, l'espansione accelerata

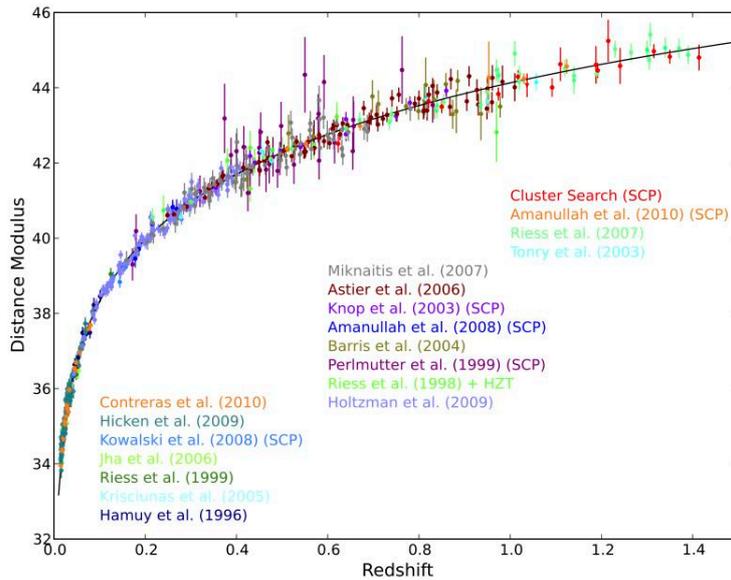


Figura 17: Modulo di distanza in funzione del redshift per un insieme di 580 supernove, 20 delle quali di Tipo Ia. La linea continua riporta i dati del calcolo delle distanze di luminosità riferite al Modello Standard [N. Suzuki et al., *The Astrophysical Journal*, 2012].

richiedeva la presenza di una energia oscura che, come dice il nome, rappresenta un enigma non risolto per la Fisica contemporanea, Nel frattempo, per le necessità pratiche del calcolo la soluzione più semplice (esaminata nel testo a più riprese), era la reintroduzione nelle equazioni della costante cosmologica. Tale costante era stata introdotta, e poi ripudiata, da Einstein come una forza che contrastasse la gravità e consentisse di avere, come si credeva necessario nel 1917, un universo statico.

In realtà l'azione della costante cosmologica è diversa: si tratta di una forma di energia definita "costante" in quanto nell'universo attuale non sembra cambiare nel tempo e, di conseguenza, è destinata a diventare sempre più dominante man mano che l'energia potenziale, associata alla gravità, si attenua a causa dell'espansione. Questo spiega perché la transizione tra decelerazione e accelerazione dell'universo [$q_0 < 0$ per $(\Omega_m)_0 = 2(\Omega_\Lambda)_0$] è avvenuta "solo" 6,13 miliardi di anni fa in corrispondenza al fattore di scala $a = 0,645$, mentre la parità tra densità di energia associata alla materia e densità di energia associata alla costante cosmologica: $\Omega_m = \Omega_\Lambda = 0,5$ è stata raggiunta "solo" 3,5 miliardi di anni fa in corrispondenza al fattore di scala $a_{m\Lambda} = 0,77$.

Una versione aggiornata dei risultati ottenuti da Perlmutter, Schmidt e Riess è illustrata nella Figura 17, che riporta in ascisse i redshift e in ordinate le corrispondenti grandezze correlate alle distanze di luminosità misurate per 580 supernove, 20 delle

quali di Tipo Ia.

Per interpretare correttamente i risultati di Figura 17, è necessario tener presente che la distanza di luminosità, in Cosmologia, viene valutata indirettamente utilizzando un'altra unità strana: il **modulo di distanza**. Il modulo di distanza, o DM acronimo del nome inglese “Distance Modulus”, combina la classificazione storica delle sei magnitudini apparenti m delle stelle viste ad occhio nudo (dalla “prima magnitudine” per le più luminose alla “sesta magnitudine” per le più deboli), con le misure bolometriche M delle luminosità assolute. Lasciando agli astronomi la responsabilità degli sviluppi analitici, qui basta ricordare il risultato finale che conduce, appunto, alla definizione operativa del modulo di distanza:

$$DM = m - M = 5 \log_{10} \frac{D_L}{1 \text{ Mpc}} \quad (99)$$

La Figura 17 riporta i dati relativi ai Moduli di Distanza in funzione del redshift z , misurati per l'insieme delle supernove. La linea continua si riferisce ai risultati del calcolo effettuato con il Modello Standard utilizzando i valori dei parametri che meglio approssimano i risultati delle misure. Dall'insieme dei dati, relativi al 2012, emerge la stima: $(\Omega_\Lambda)_0 \cong 0,73$ e $(\Omega_m)_0 \cong 0,27$ ma, se si limita l'analisi alle supernove di Tipo Ia, si trova $(\Omega_\Lambda)_0 \cong 0,705$ e $(\Omega_m)_0 \cong 0,295$. L'ulteriore affinamento delle stime intervenuto negli ultimi anni ha poi portato ai “valori di consenso 2017” [$(\Omega_m)_0 = 0,31$ e $(\Omega_\Lambda)_0 = 0,69$] utilizzati nel testo.

8.4.1 Le “candele standard”

Storicamente, i primi oggetti cosmici utilizzati come “candele standard” sono state le Cefeidi, stelle giganti con luminosità variabile da 400 a 40.000 volte quella del Sole. Purtroppo le Cefeidi sono stelle pulsanti e la loro luminosità varia nel tempo in maniera non facilmente prevedibile, rendendo problematica l'utilizzazione come “standard” di luminosità.

Tuttavia, grazie ai progressi intervenuti nelle tecniche di osservazione a grandi distanze, negli ultimi anni i cosmologi hanno potuto orientarsi verso l'utilizzo di Supernove Tipo Ia: una categoria originata dall'esplosione di una nana bianca, cioè di una stella ad altissima densità. L'esplosione ha luogo quando in un sistema binario, formato da una nana bianca e da un'altra stella (ad esempio una stella gigante rossa), la nana bianca, grazie alla sua enorme attrazione gravitazionale, accresce la massa a spese della stella compagna, come illustrato nella Fig. 18 a sinistra.

In questo modo la nana bianca può raggiungere la massa critica, pari a circa 1,4 volte la massa del Sole, alla quale si innesca una reazione di fusione nucleare. La fusione, a sua volta, porta ad una gigantesca esplosione caratterizzata da una luminosità 100.000 volte maggiore di quella delle più luminose Cefeidi. Infatti, come si vede dalla Fig. 18 a destra, la luminosità di una Supernova Tipo Ia supera quella della galassia che la ospita.

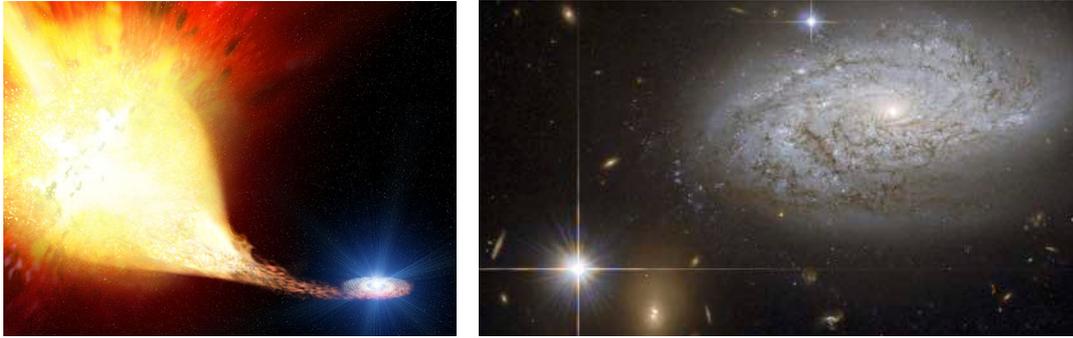


Figura 18: Supernove: trasferimento di massa da una gigante rossa a una nana bianca (a sinistra) [Wikipedia], e luminosità di una Supernova Tipo Ia maggiore di quella dell'intera galassia che la ospita (a destra) [A. Fraknoi et al., Openstax, Astronomy].

Vantaggio aggiuntivo è poi il fatto che l'andamento nel tempo della curva di luminosità di tutte le Supernove Tipo Ia è identico e ben conosciuto (ma una discussione dettagliata di quest'ultimo punto non rientra nei limiti che qui ci si pone).

9 La radiazione cosmica di fondo

Nei primi anni '60 del secolo scorso, era ben noto che molti corpi celesti emettono radiazioni elettromagnetiche sotto forma di radioonde, e che lo studio di tali onde consente di ricavare informazioni importanti sulle caratteristiche fisiche delle radiosorgenti. (La Radioastronomia, infatti, era già un completamento importante dell'astronomia ottica classica). All'epoca, inoltre, si constatava la presenza di radiazioni elettromagnetiche di fondo provenienti dallo spazio, ma si riteneva che fossero un disturbo casuale derivante dalla somma di molti segnali di origine sia galattica sia extragalattica. Per ricavare informazioni più attendibili era necessario, infatti, disporre di un sistema ricevitore/antenna di sensibilità superiore a quella delle apparecchiature di questo tipo a disposizione dei radioastronomi.

Un'apparecchiatura di tecnologia superiore, tuttavia, era già stata costruita nel New Jersey dalla compagnia telefonica Bell, per consentire le radiocomunicazioni con gli storici satelliti Echo e Telstar. Quando, cessata la sua funzione originaria, la Bell mise l'apparecchiatura a disposizione della ricerca, i due radio-astronomi Arno Penzias e Robert Wilson (successivamente premiati con il Nobel per la Fisica nel 1978) decisero di dedicarsi allo studio sistematico della radiazione di fondo. Eliminate le cause di disturbo "possibili" (quali i segnali spuri generati dalla stessa apparecchiatura, i segnali radio provenienti dalle città vicine e, dice il folklore, il guano dei colombi che nidificavano sull'antenna) Penzias e Wilson fecero una scoperta inattesa. La radiazione di fondo non

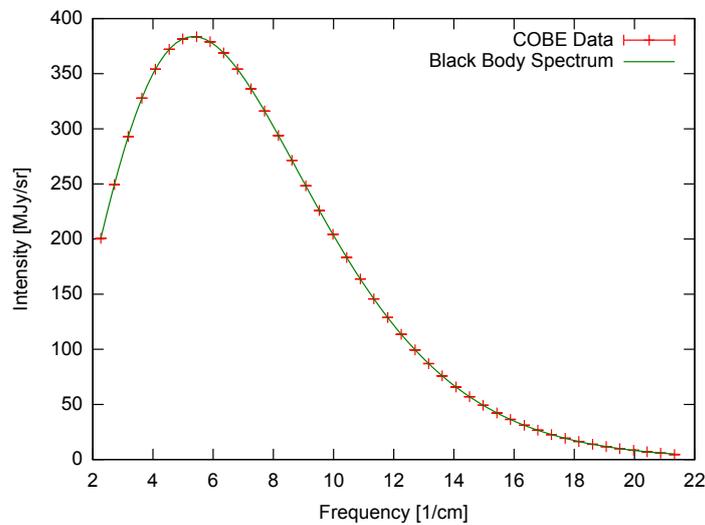


Figura 19: Misure dello spettro della radiazione cosmica di fondo eseguite con l'ausilio del satellite COBE. Lo spettro corrisponde perfettamente alla emissione di un corpo nero alla temperatura $T = 2,7255$ K. Il picco si trova alla frequenza $\bar{f} = 5,35 \text{ cm}^{-1}$ corrispondenti a $f = 160 \text{ GHz}$ in unità SI.

era casuale ma coerente, proveniva dallo spazio profondo ed era uniforme in tutte le direzioni: in poche parole, tutto l'universo era riempito da tale radiazione la cui origine era, all'epoca, sconosciuta.

L'enigma dell'origine fu risolto in breve da Robert Dicke, ricercatore della vicina Università di Princeton (che si trova, appunto, nel New Jersey). Quella che Penzias e Wilson avevano osservata era la radiazione cosmica di fondo, ovvero il residuo (e la prova inconfutabile) del Big Bang. Negli anni successivi il supporto per l'interpretazione di Dicke venne da un gran numero di risultati sperimentali sempre più accurati. Secondo le misure effettuate con l'ausilio del satellite COBE (Cosmic Background Explorer - Esploratore del Fondo Cosmico), lo spettro della radiazione cosmica di fondo, riportato nella Figura 19, è perfettamente sovrapponibile allo spettro di emissione di un corpo nero che si trova alla temperatura assoluta:

$$T = 2,7255 \pm 0,0006 \text{ K}$$

Purtroppo, come al solito, le unità di misura utilizzate nella figura dai Cosmologi sono diverse da quelle utilizzate nella Trasmissione del Calore. Passi per l'unità di misura della frequenza riportata in ascisse:

$$\bar{f} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

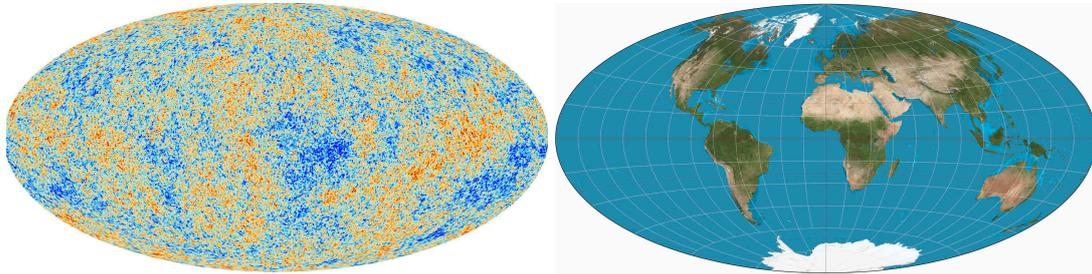


Figura 20: A sinistra: la distribuzione delle oscillazioni di temperatura nella radiazione cosmica di fondo, con scarti da -30 a +30 milionesimi di grado kelvin [NASA, WMAP, CMB Maps]. A destra un'analogia familiare per spiegare la tecnica di rappresentazione cartografica utilizzata.

in quanto si tratta del numero d'onda spaziale, utilizzato normalmente in spettroscopia per indicare il numero di onde contenute nell'unità di lunghezza. I problemi veri cominciano con le ordinate, dove è utilizzato il Mega jansky per steradiante [MJy/sr], dal nome del fisico statunitense Karl Guthe Jansky che, nel 1930, scoprì le onde radio di origine cosmica. Il fattore di conversione in unità del Sistema Internazionale è: $1 \text{ MJy} = 10^{-20} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ Hz})$. Inoltre, per quanto riguarda il diagramma nel suo insieme, una difficoltà aggiuntiva è rappresentata dal fatto che le rappresentazioni tradizionali dello spettro di un corpo nero sono del tipo: (intensità - lunghezza d'onda) e non (intensità - frequenza). Di conseguenza, all'aumentare della temperatura il massimo dell'intensità nelle rappresentazioni cosmologiche si sposta verso destra (frequenze più alte) e non verso sinistra (lunghezze d'onda più basse) come nelle rappresentazioni tradizionali. Ciò premesso, tuttavia, bisogna dire che l'accordo tra calcoli (spettro di emissione del corpo nero) e misure (spettro della radiazione cosmica di fondo) è veramente impressionante e con pochi uguali nella Fisica.

Un altro risultato importante delle misure effettuate con l'ausilio dei satelliti è la grande uniformità delle temperature in tutti i punti della volta celeste caratterizzati da oscillazioni dell'ordine dei 30 milionesimi di grado kelvin, come mostrato nella proiezione ellittica della volta celeste riportata nella Figura 20 a sinistra. (Le tecniche utilizzate per le proiezioni ellittiche di oggetti sferici su un piano non sono semplici da spiegare, ma l'esempio della Figura 20 a destra può servire a riportare la tecnica in un ambito più familiare).

I due risultati relativi alla radiazione cosmica di fondo: spettro quasi perfetto di corpo nero e grande uniformità sono perfettamente compatibili con lo scenario del Big Bang nel quale l'universo originario era molto caldo, denso ed omogeneo. Spiegazioni diverse, infatti, sono molto più complesse e, di conseguenza, violano il principio metodologico del *Rasoio di Occam* espresso nel quattordicesimo secolo dal filosofo e frate

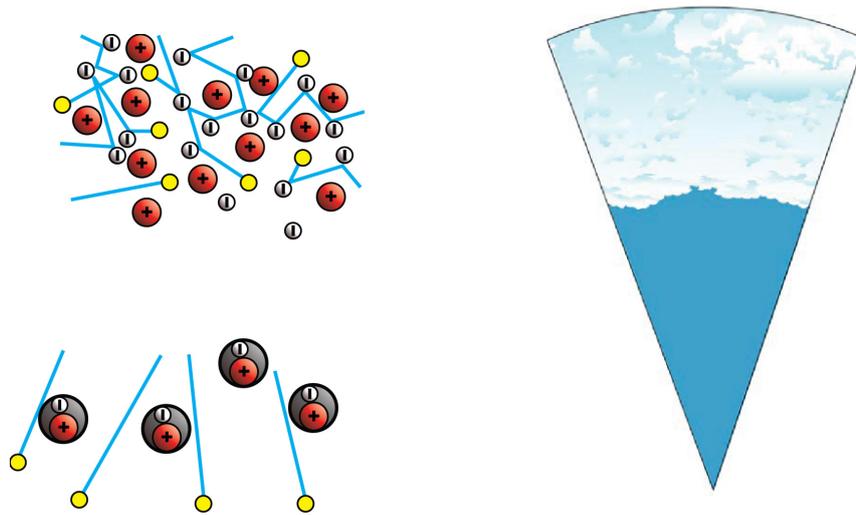


Figura 21: Nel plasma originario (sinistra in alto) gli elettroni sono liberi e deviano i fotoni in modo casuale (scattering) creando una zona opaca. L'universo si raffredda espandendosi (sinistra in basso) e gli elettroni si riuniscono ai nuclei formando atomi che, nel frattempo, si allontanano gli uni dagli altri. Le probabilità di collisione dei fotoni con gli atomi si riducono rapidamente e l'universo diventa trasparente [*Decoupling, Write Science*]. L'analogia (a destra) è con il Sole nascosto dietro le nubi quando si "vede" soltanto fino alla superficie di "last scattering" della nube dove la luce solare viene deviata l'ultima volta [*A. Fraknoi et al., Openstax, Astronomy, modificata*].

francescano inglese William of Ockham (in italiano Guglielmo di Occam). Secondo tale principio, che molti considerano uno dei fondamenti del metodo scientifico, tra le diverse possibili spiegazioni di un dato fenomeno bisogna scegliere la più semplice che, generalmente, è quella basata sul minor numero di ipotesi.

9.1 Origine della radiazione di fondo

In premessa occorre tener presente che gli elettroni possono assorbire ed emettere fotoni solo se legati agli atomi. A seguito dell'assorbimento di fotoni, gli elettroni passano ad orbite caratterizzate da livelli energetici superiori o, al limite, abbandonano l'atomo (come succede nell'effetto fotoelettrico). Simmetricamente, a seguito dell'emissione di fotoni, gli elettroni passano ad orbite caratterizzate da livelli energetici inferiori (ed, infatti, non emettono fotoni quando si trovano nel livello energetico più basso). Gli elettroni liberi, invece, possono solo deviare i fotoni (processo di scattering), ovvero assorbirli e ri-emetterli in una direzione casuale (effetto Compton).

Per capire l'origine della radiazione cosmica di fondo si può, quindi, fare riferimento alla Figura 21. Trascurando il primissimo periodo di esistenza dell'universo (al quale si accennerà nel Paragrafo 9.2), si può dire che dopo 3 minuti circa i nuclei atomici (protoni e neutroni) erano formati ma, data l'altissima temperatura (dell'ordine del miliardo di gradi kelvin), gli elettroni erano liberi (ovvero la materia era allo stato di plasma omogeneo). Nel plasma di Figura 21 a sinistra in alto, vi erano moltissimi elettroni liberi che interagivano con i fotoni provenienti dal Big Bang deviandoli in direzioni casuali (processo di scattering). In questo modo, si era creata una zona opaca dalla quale non fuoriuscivano radiazioni elettromagnetiche.

D'altra parte, in un universo dominato dalla radiazione, e nell'ipotesi di un numero totale di fotoni costante, vale la relazione (45), qui riscritta nella forma:

$$\rho_r \sim \frac{1}{a^4} \quad (100)$$

Inoltre, per la ben nota relazione di Stefan-Boltzmann (riferibile anche alla densità di energia con la sola sostituzione del coefficiente di proporzionalità), si ha:

$$\rho_r \sim T^4 \quad (101)$$

Uguagliando i secondi membri delle relazioni precedenti si arriva alla

$$T \sim \frac{1}{a} = z + 1 \quad (102)$$

ovvero ad una relazione di proporzionalità inversa tra temperatura e fattore di scala e di proporzionalità quasi diretta con il redshift z .

Le considerazioni precedenti dimostrano che, a causa dell'espansione dell'universo, il gas fotonico si raffreddava continuamente. Dopo circa 370.000 anni, infatti, la temperatura dell'universo era scesa a circa 3000 K (2970 K per la precisione) a seguito dell'espansione continua. A questo punto, però, i nuclei e gli elettroni non erano più allo stato di plasma omogeneo ma si erano riuniti in atomi (con prevalenza degli atomi di idrogeno ed elio che sono i più semplici) la cui temperatura non doveva più continuare ad essere uguale a quella del gas fotonico.

Dalla Figura 21 a sinistra in basso si vede, tuttavia, che il numero di fotoni restava ancora costante in quanto, sempre a causa dell'espansione, gli atomi si erano allontanati gli uni dagli altri e le probabilità di collisione con i fotoni si erano molto ridotte (ed erano destinate a ridursi sempre di più). La superficie a 2970 K viene, infatti, definita superficie di ultima deviazione, o di "last scattering" in quanto, dopo di essa, l'universo è trasparente alle radiazioni. (Naturalmente i fotoni non sono un corpo di ballo e, quindi, tale valore va inteso come media statistica e la superficie è, piuttosto, uno strato di last scattering).

La situazione è analoga a quella che si ha nella Figura 21 a destra dove il Sole è nascosto dietro le nubi. In questo caso, da Terra si riesce a "vedere" non dentro la nube

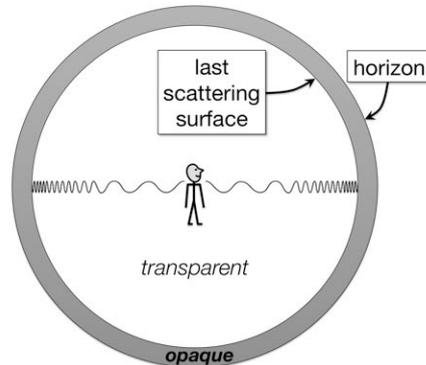


Figura 22: In qualunque punto dell’universo si trovi, un osservatore è circondato da una superficie sferica di “last scattering”. I fotoni della radiazione cosmica di fondo arrivano da tale superficie dopo aver subito un redshift continuo durante il viaggio [B. Ryden, *Introduction to Cosmology*].

ma soltanto fino alla superficie di “last scattering” della nube, dove la luce solare viene deviata l’ultima volta dalle microparticelle d’acqua libere che, sotto questo aspetto, si comportano come gli elettroni. (Anche per quanto riguarda la collocazione della superficie di ultima deviazione l’analogia con la nube è valida: in questo caso, come si intuisce dalla figura siamo in presenza di uno strato di last scattering).

Per considerazioni di carattere quantitativo, però, conviene fare riferimento alla schematizzazione di Figura 22. Attualmente, in un punto qualunque dell’universo, un osservatore è circondato dalla propria superficie sferica di “last scattering” e riceve i fotoni emessi, appunto, all’epoca di last scattering. Il redshift subito da tali fotoni durante il loro viaggio è stimabile in base al rapporto, ricavato dalla (102)

$$z \cong \frac{T_{ls}}{T_{cmb}} = \frac{2970}{2,7255} = 1090 \quad (103)$$

che, come anticipato, porta a una stima di 370.000 anni circa dal Big Bang per l’evento di last scattering. La superficie di last scattering dista, attualmente, 45,1 miliardi di anni luce mentre, come detto in precedenza, la distanza attuale dell’orizzonte (che si trova al confine più lontano della zona opaca) è pari a circa 46,1 miliardi di anni luce.

Di conseguenza, anche da un esame superficiale della Figura 22, emerge un’osservazione importante. Due punti opposti sulla superficie di last scattering distano tra di loro $45,1 \cdot 2 = 90,2$ miliardi di anni luce, ovvero si trovano a una distanza quasi doppia della distanza dell’orizzonte. Appare, quindi, abbastanza difficile da spiegare come vi sia tanta uniformità di temperatura in punti che, distando più dell’orizzonte, non sono mai stati in contatto tra loro e, tanto meno, hanno mai potuto scambiare calore per raggiungere un equilibrio termico.

Infine, va detto che qui ci si è limitati a considerazioni che sono alla portata di “non addetti ai lavori”. I cosmologi, infatti, hanno analizzato, e stanno ancora analizzando, i risultati delle misure condotte sulla radiazione cosmica di fondo con l’ausilio dei satelliti. Da tali analisi hanno ricavato, per esempio, i valori attribuiti ai parametri utilizzati nel Modello Cosmologico Standard (che qui ci si è limitati a citare), e hanno confermato la validità dell’ipotesi di un universo piano, caratterizzato ovunque da una curvatura Gaussiana $k \cong 0$. Ancora da tali misure derivano informazioni molto preziose sulla **ricombinazione** di elettroni e nuclei per arrivare agli atomi, e sul **disaccoppiamento** tra fotoni e materia. Sullo studio delle micro-irregolarità termiche nella radiazione cosmica di fondo sono basate anche le più moderne teorie sulla formazione delle strutture complesse (corpi celesti, stelle e galassie) per le quali le irregolarità hanno agito da nuclei di formazione.

Si deve, pertanto, riconoscere che l’ipotesi del Big Bang, con un universo inizialmente dominato dalla radiazione, ha condotto a risultati veramente notevoli. Restano, tuttavia, due problemi aperti dei quali ci si occuperà (al livello in cui qui ci si pone) nel paragrafo che segue: la grandissima uniformità della radiazione cosmica di fondo e il fatto che ci troviamo in un universo quasi perfettamente piano.

9.2 Inflazione in cosmologia

La teoria dell’inflazione, in cosmologia, ipotizza che, immediatamente dopo la nascita (10^{-36} secondi dopo per la precisione), l’universo sia stato dominato per un periodo di tempo, sia pur brevissimo (10^{-34} secondi), da una costante cosmologica Λ_{inf} , enormemente più elevata di quella attuale. Secondo questa visione, l’inflazione sarebbe il vero e proprio Big Bang, dal momento che un’esplosione, se vogliamo, non è altro che una espansione brevissima ed estremamente violenta.

Durante il dominio della costante cosmologica iniziale, la prima equazione di Friedmann (22) si riduce a

$$H_{inf}^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\Lambda_{inf}c^2 \quad (104)$$

e, procedendo in analogia al Paragrafo 7.1.3, dal primo e secondo membro si ottiene

$$H_{inf}t = \int \frac{da}{a} \quad (105)$$

Passando all’integrazione dall’istante iniziale t_i a quello finale t_f del periodo di inflazione si arriva alla

$$H_{inf}t \Big|_{t_i}^{t_f} = \ln |a| \Big|_{a(t_i)}^{a(t_f)} \quad \Rightarrow \quad H_{inf}(t_f - t_i) = \ln \left| \frac{a_f}{a_i} \right| \quad (106)$$

da cui si ricava la relazione che esprime l'aumento del fattore di scala durante la fase di inflazione:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{H_{inf}(t_f - t_i)} \quad (107)$$

Per valutare l'ordine di grandezza dell'esponente al secondo membro conviene partire da una stima del parametro di Hubble H_{inf} (che, ricordiamolo, resta costante durante il periodo in cui l'universo è dominato da Λ_{inf}). In base alla definizione di tempo di Hubble, l'ordine di grandezza cercato è il reciproco dell'età dell'universo al momento della stima, ovvero

$$H_{inf} = \frac{1}{t_i} = 10^{36} \text{ s}^{-1}$$

Di conseguenza si ha

$$H_{inf}(t_f - t_i) = \frac{10^{36}}{10^{34}} = 100$$

(ma calcoli meno approssimativi portano ad una stima di 65, anziché 100, per l'esponente). Anche il risultato "prudente", tuttavia conduce ad un numero enorme per la stima dell'espansione

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{65} \cong 1,7 \cdot 10^{28}$$

Durante il periodo di inflazione, infatti, la dimensione media dell'universo è passata da 10^{-28} metri a 15 metri circa.

Può anche essere interessante notare che, dal primo e terzo membro della (104), si ha

$$\Lambda_{inf} = \frac{3H_{inf}^2}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^{72}}{9 \cdot 10^{16}} = 3 \cdot 10^{55} \text{ m}^{-2}$$

contro un valore di $1,11 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ per la costante cosmologica attuale.

Al momento, la teoria dell'inflazione non trova conferma nelle osservazioni astronomiche (anche se, a onor del vero, diversi cosmologi sono alla ricerca delle onde gravitazionali che avrebbero potuto essere generate dal Big Bang). In ogni caso, la teoria dell'inflazione è accettata dalla maggior parte dei cosmologi per il suo grandissimo potere esplicativo.

La teoria, ad esempio, fornisce una spiegazione molto semplice e ragionevole del fatto che, attualmente, si abbia un **universo piano**, ovvero caratterizzato da una costante di curvatura k praticamente uguale a zero. L'analogia che si fa deriva dall'osservazione che qualunque geometria avesse l'universo iniziale, dopo l'inflazione non si poteva avere che un universo piano. Si supponga, infatti, che l'universo iniziale fosse sferico: l'espansione agisce sulla geometria sferica come evidenziato nella Fig. 23 e già dopo un aumento del fattore di scala pari a 27 appare piana. (A causa dell'inflazione l'universo avrebbe subito un'espansione pari a circa $1,7 \cdot 10^{28}$ volte e, di conseguenza, non può che essere emerso piano qualunque fosse la configurazione precedente).

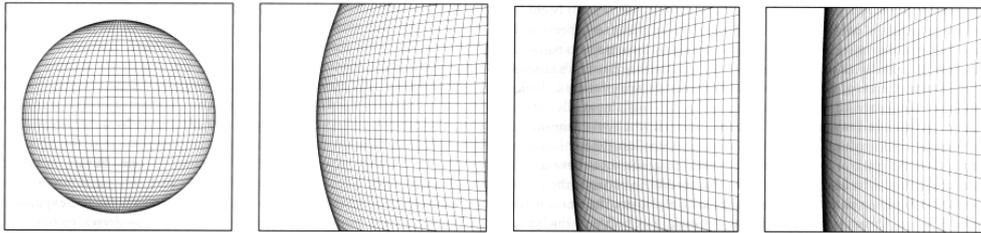


Figura 23: Una sfera viene espansa di un fattore 3 ad ogni stadio e, dopo un ingrandimento di $3^3 = 27$ volte, appare caratterizzata da una curvatura $k = 0$ [A. Guth, Caltech, modificata].

La teoria spiega anche molto bene la straordinaria **omogeneità termica della radiazione cosmologica di fondo**. Come evidenziato nella Fig. 24, l'universo pre-inflazione comprendeva una piccola regione (quasi un punto) circondata da una regione più grande. L'intero universo pre-inflazione si è espanso e la piccola regione è diventata il nostro universo attuale che, come evidenziato nella Figura 24, è circondato da uno spazio più grande (probabilmente in continua espansione come, del resto, il nostro universo). Di conseguenza, nulla vieta di pensare che tutti i punti del nostro universo attuale fossero inizialmente in contatto termico ed avessero quindi equilibrato la loro temperatura. Pertanto le microonde che provengono da punti opposti del cosmo si trovano alla stessa temperatura perché, nell'universo pre-inflazione, erano in equilibrio termico.

10 Conclusione

Quanto si è detto fin qui è ben riassunto da schematizzazioni del tipo di quelle riportate nelle Figure 25, dove si presentano due versioni degli stessi eventi sottolineando aspetti diversi. In entrambi i casi, comunque, le scale trasversali all'asse principale della rappresentazione non pretendono di rispecchiare le dimensioni effettive.

La Figura 25 a sinistra mostra chiaramente l'espansione del nostro universo piano ripercorrendone le fasi fondamentali. All'inflazione iniziale seguì una decelerazione dovuta alla relativa vicinanza e, quindi, alla forte attrazione reciproca tra le galassie. Quando le galassie riuscirono, comunque ad allontanarsi, l'influenza della gravità si indebolì, mentre cominciò a far sentire i suoi effetti l'energia oscura che, in tempi abbastanza recenti, ha preso il sopravvento, accelerando di nuovo l'espansione.

La Figura 25 a destra parte dai primi momenti di vita dell'universo, seguiti dalla crescita esponenziale dovuta all'inflazione, dalla decelerazione dovuta alla gravità e, infine, dall'accelerazione dovuta alla materia oscura. Il punto di vista è quello del satellite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), e l'accento è sulle misure relative alla radiazione cosmica di fondo, liberata circa 375.000 anni dopo il Big Bang. Le mi-

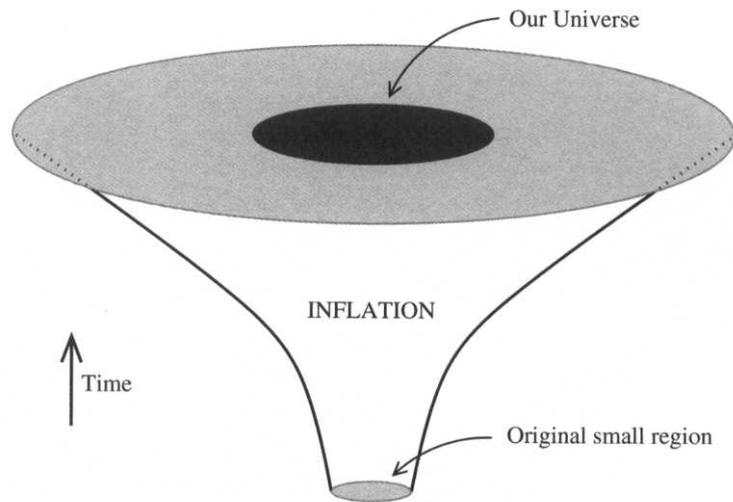


Figura 24: Una piccola regione dell'universo pre-inflazione (quasi un punto), inizialmente in equilibrio termico, si è espansa fino a diventare il nostro universo attuale. Tale regione è circondata da uno spazio più grande che sta oltre il nostro orizzonte e che, probabilmente, continua ad espandersi come il nostro universo [A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*].

Le irregolarità termiche nella radiazione di fondo si sono tradotte in micro variazioni di densità che hanno agito da centri di nucleazione per formare le stelle (circa 400 milioni di anni dopo il Big Bang). Le stelle, a loro volta, hanno dato origine alle galassie ed ai pianeti.

La constatazione che più sorprende è come, a distanza di oltre un secolo, tutte le rappresentazioni della storia dell'universo siano costruite ancora utilizzando, in combinazioni diverse, gli stessi "ingredienti" utilizzati da Einstein nelle sue "Considerazioni Cosmologiche sulla Teoria della Relatività Generale":

- Principio Cosmologico,
- equazioni della relatività generale semplificate e
- costante cosmologica.

Ovviamente i progressi compiuti nelle osservazioni astronomiche e, soprattutto, i dati forniti dai satelliti hanno consentito verifiche sperimentali impensabili ai tempi di Einstein. Di conseguenza, i modelli attualmente usati e, in modo particolare, il Modello Cosmologico Standard sono accurati, completamente affidabili e, pregio non ultimo, sono stati resi alla portata di tutti.

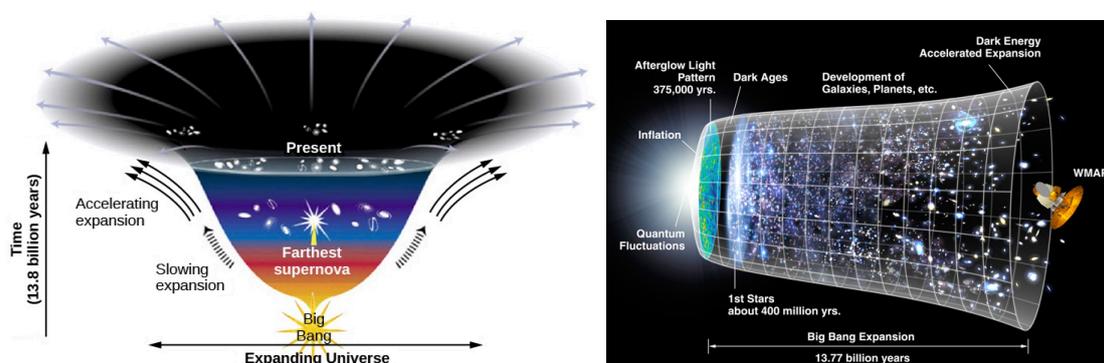


Figura 25: Schematizzazioni della storia dell’universo: a sinistra l’accento è sulle fasi di espansione con i relativi periodi di decelerazione e accelerazione [A. Fraknoi et al., *Openstax, Astronomy*]. A destra l’accento è sulla formazione delle strutture celesti a partire dalle micro irregolarità nella radiazione cosmica di fondo [NASA, WMAP].

Per utilizzare i modelli cosmologici senza essere degli “addetti ai lavori”, basta cercare su Google: “cosmology calculators” e cliccare sul link che consente l’accesso libero alle relative applicazioni. Il link che più si adatta a un universo piano è quello dell’Università del Colorado, curato da Nick Gnedin.

All’ingresso, il link di Gnedin richiede: la frazione di materia (chiamata Ω_0) e la costante di Hubble H_0 valutate al tempo presente, oltre ad un valore a scelta tra redshift e fattore di scala. Ad esempio, con: $\Omega_0 = 0,31$, $H_0 = 68$ km/(s Mpc) e $z = 0,5$ il Calcolatore Cosmologico restituisce all’uscita: $a = 0,667$ e tutta una serie di dati interessanti, tra i quali: età dell’universo (8,557 miliardi di anni), distanza di luminosità (2911,77 Mpc), parametro di Hubble all’epoca dell’emissione [$H = 89,6$ km/(s Mpc)]. Evidentemente, questo è il modo moderno per rendere obsolete le Tabelle riportate nei testi tradizionali.

Bibliografia

AA. VV., *Cosmology Calculators*, Cercare su Google “Cosmology Calculators”, 2018.

D. Babusci, *Introduzione alla Cosmologia*, INFN, Laboratori Nazionali di Frascati, 2017.

P. Benvenuti, *Origine ed evoluzione dell’universo: cosa può o non può dire la scienza*, Prolusione, Università degli Studi di Padova, 2016.

P. Coles e F. Lucchin, *Cosmology: the Origin and Evolution of Cosmic Structure-II ed.*, Wiley, Chichester, Inghilterra, 2002.

G. Comini e G. Cortella, *Fondamenti di Trasmissione del Calore-IV ed.*, SGEEditoriali, Padova, 2013.

G. Comini, *La Relatività per Non Addetti ai Lavori*, CISM, Cercare su Google “Cism Relativita”, 2018.

A. De Angelis e M.J. Martins Pimenta, *Introduction to Particle and Astroparticle Physics. Multimessenger Astronomy and its Particle Physics Foundations-II ed.*, Springer, 2018.

A. Einstein, *Considerazioni cosmologiche sulla teoria della Relatività Generale*, Preuss. Akad. Wiss. 142 (1917).

A. Einstein e K. Sitzungsber, *Le onde gravitazionali*, Preuss. Akad. Wiss. 1, 154 (1918).

A. Fraknoi, D. Morrison e S.C. Wolff, *Astronomy*, Download gratuito, Openstax, 2016.

E. Harrison, *Cosmology: The Science of the Universe-II ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

W. Isaacson, *Einstein: la Sua Vita, il Suo Universo*, Mondadori, 2010.

A. Liddle e J. Loveday, *Oxford Companion to Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology-III ed.*, Wiley, Chichester, Inghilterra, 2015.

D. Perkins, *Particle Astrophysics-II ed.*, Oxford University Press, Oxford 2011.

M. Roots, *Introduction to Cosmology-III ed.*, Wiley, Chichester, Inghilterra, 2003.

Royal Swedish Academy of Sciences, *Cosmology and the Cosmic Microwave Background*, Advanced Information on the Nobel Prize in Physics, 2006.

Royal Swedish Academy of Sciences, *The Accelerating Universe*, Scientific Background on the Nobel Prize in Physics, 2011.

B. Ryden, *Introduction to Cosmology-II ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

Ta-Pei Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology. A basic introduction-II ed.*, Oxford University Press, Oxford 2005.

S. Weinberg, *I primi tre minuti*, Mondadori, Oscar Saggi, 1980.

Wolfram—Alpha, *Online Integral Calculator*, Cercare su Google: “Integral Calculator”, 2018.